

**Wersja testowa, musi być gruntownie sprawdzona również pod  
względem merytorycznym  
Cyprian T. Lachowicz 2006.**



Cyprian T. Lachowicz

Wytrzymałość Materiałów  
Zadania

Opole 18 listopada 2007



## Spis treści

<b>Rozdział 1. Rozciąganie - ściskanie</b> . . . . .	1
1.1. Zadania statycznie wyznaczalne . . . . .	1
1.1.1. Siły wewnętrzne . . . . .	1
1.1.2. Naprężenia normalne, całkowite wydłużenie, energia potencjalna sprężystości . . . . .	4
1.1.3. Odształcenia poprzeczne, zmiana objętości . . . . .	6
1.1.4. Przesunięcia punktów układów prętowych . . . . .	7
1.1.5. Sprawdzanie wytrzymałości . . . . .	9
1.1.6. Wpływ ciężaru własnego . . . . .	13
1.1.7. Zdania do samodzielnego wykonania . . . . .	16
1.2. Zadania statycznie niewyznaczalne . . . . .	18
1.2.1. Układy prętowe i pręty utwierdzone . . . . .	18
1.2.2. Zdania do samodzielnego wykonania . . . . .	26
1.3. Koło Mohra . . . . .	29
<b>Rozdział 2. Zginanie</b> . . . . .	35
2.1. Reakcje podpór i siły przekrojowe . . . . .	35
2.1.1. Ogólny przypadek obciążenia ciągłego . . . . .	35
2.1.2. Ogólny przypadek obciążenia ciągłego momentem zginającym . . . . .	36
2.1.3. Obciążenie stałym ciągłym momentem zginającym . . . . .	38
<b>Bibliografia</b> . . . . .	41



## Rozdział 1

# Rozciąganie - ściskanie

### 1.1. Zadania statycznie wyznaczalne

#### 1.1.1. Siły wewnętrzne

##### Przykład 1

Znaleźć siły wewnętrzne w pręcie (rys. 1.1). Dane  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 3P$ ,  $P_3 = 2P$ , obciążenie ciągłe ma intensywność  $q(x) = \frac{Px}{2a^2}$ . Podstawowa zależność, wynikająca z równań statyki, pozwalająca obliczyć wartość siły wewnętrznej w pręcie, ma postać:

$$N_x = \sum_i P_i + \sum_i \int q_i(x) dx. \quad (1.1.1)$$

Budujemy równania równowagi (1.1.1) dla kolejnych wyodrębnionych myślowo fragmentów pręta (rys. 1.1 i wyznaczamy poszukiwane wartości sił wewnętrznych.

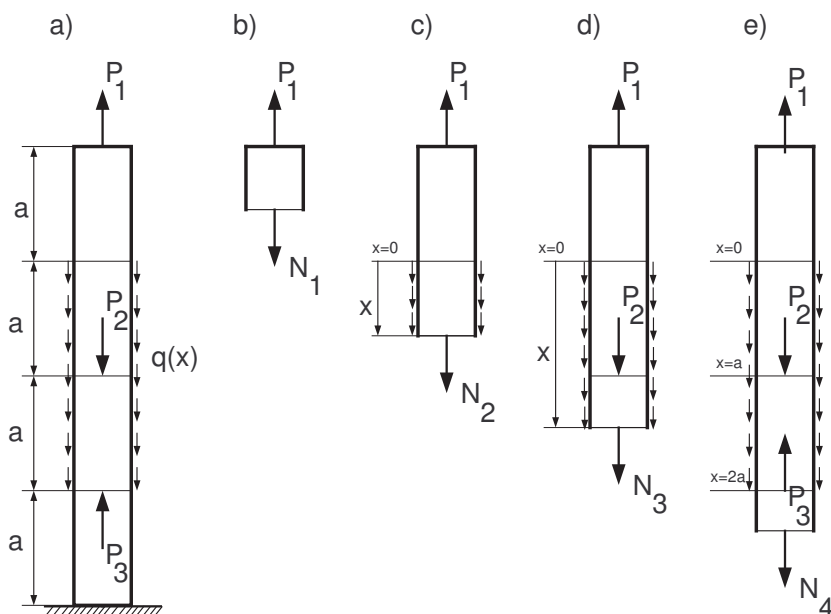
$$N_1 = P_1 = P, \quad (1.1.2)$$

$$N_2 = P_1 - \int_0^x \frac{Px}{2a^2} = P \left( 1 - \frac{x^2}{4a^2} \right), \quad \text{dla } x \in \langle 0, a \rangle,$$

$$N_3 = P_1 - P_2 - \int_0^x \frac{Px}{2a^2} dx = P \left( -2 - \frac{x^2}{4a^2} \right), \quad \text{dla } x \in \langle a, 2a \rangle,$$

$$N_4 = P_1 - P_2 + P_3 - \int_0^{2a} \frac{Px}{2a^2} dx = -\frac{P}{4}.$$

Należy zwrócić uwagę, że siły wewnętrzne  $N_2$  i  $N_3$  są zależne od współrzędnej  $x$ . Na rys. 1.2 pokazano wykreślony na podstawie zależności (1.1.2) wykres sił wewnętrznych w pręcie. Do jego wykreślenia można wykorzystać następujący skrypt Scilaba.

Rys. 1.1. Pręt obciążony siłami skupionymi  $P_i$  oraz obciążeniem ciągłym  $q(x)$ 

```

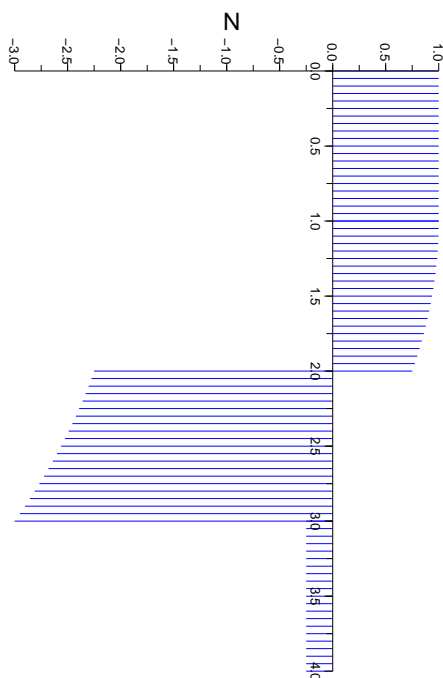
a=1;
P=1;
dx=0.05;
x1=0:dx:a;
x2=a:dx:2*a;

//
N1=-P*ones(1:length(x1));
N2=P*(1-x1^2/(4*a^2));
N3=P*(-2-x2^2/(4*a^2));
N4=(-P/4)*ones(1:length(x1));
//
N=[N1 N2 N3 N4];
x=[x1 x1+a x1+2*a x1+3*a];
//
set("figure_style","new")

```



```
xset('window',0);  
xbasec();  
plot2d3([x],[N], style=[2]);  
xtitle('','','N');  
a=gca();  
a.box="off";  
a.x_location="middle";  
a.title.font_style=5;  
a.title.font_size=20;
```

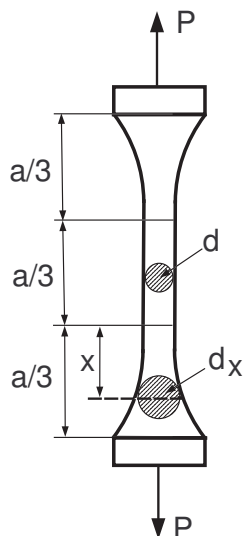


Rys. 1.2. Wykres sił wewnętrznych dla pręta z rys. 1.1

### 1.1.2. Naprężenia normalne, całkowite wydłużenie, energia potencjalna sprężystości

#### Przykład 2

Znaleźć wykres naprężeń  $\sigma_x$ , wyznaczyć przyrost długości  $\Delta l$  oraz wartość energii sprężystej rozciągania  $U$  dla pręta z rys. 1.3. Dane  $P = 10 \text{ kN}$ ,  $l = 0,3 \text{ m}$ ,  $d = 0,01 \text{ m}$ ,  $d_x = (0,01 + x^2) \text{ m}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Siła



Rys. 1.3.

wewnętrzna w pręcie jest stała  $N_x = P = 10 \text{ kN}$  w dowolnym przekroju i może być wyznaczona z równania równowagi (1.1.1). Powierzchnia pola przekroju pręta w części cylindrycznej jest stała i wynosi:  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 0,25\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . W pozostałych dwóch częściach pole przekroju wyraża się zależnością  $A_x = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi}{4}(0,01 + x^2)^2 \text{ m}^2$ . Naprężenie normalne w części cylindrycznej obliczamy z zależności

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = 127,3 \text{ MPa}, \quad (1.1.3)$$

natomiast w częściach o zmiennym przekroju z zależności

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A_x} = \frac{4P}{\pi(0,01 + x^2)^2} = \frac{127,3}{(1 + 100x^2)^2}. \quad (1.1.4)$$

Wykres naprężeń wzdłuż pręta możemy wykreślić przy użyciu programu napisanego w Scilabie o konstrukcji zbliżonej do tej pokazanej w przykładzie 1 i umieszczonego na stronie 1.

Wydłużenie całkowite pręta wyznaczamy z zależności

$$\Delta l = \sum \int \frac{N_x dx}{EA_x}, \quad (1.1.5)$$

gdzie: E – moduł Younga.

Obliczenie wydłużenia  $\Delta l$  wymaga obliczenia wartości całki oznaczonej

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum \int \frac{N_x dx}{EA_x} = \frac{Pl}{3EA} + \frac{8P}{\pi E} \int_0^{l/3} \frac{dx}{(0,01 + x^2)^2}, \\ \Delta l &= \frac{Pl}{3EA} + \frac{8P}{\pi E} \left| \frac{x}{2(0,01 + x^2)} \frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{2 \cdot 0,1^2} \arctg \frac{x}{0,1} \right|_0^{0,1}, \\ \Delta l &\approx 1,46 \cdot 10^{-4} m. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Obliczenia wydłużenia  $\Delta l$  możemy sobie ułatwić (szczególnie chodzi o obliczenie wartości całki oznaczonej) posługując się skryptem napisanym w Maximie. Najpierw piszemy sekwencję poleceń kodujących w sposób symboliczny pierwszą z zależności ze wzoru (1.1.6)

`P*1/(3*E*A)+(8*P/(%pi*E))*integrate(1/(0.01+x^2)^2, x,0,0.1);`

która po zinterpretowaniu przez Maximę przyjmuje poniższą postać

$$\frac{l P}{3 A E} + \frac{8 \left( \int_0^{0.1} \frac{1}{(x^2+0.01)^2} dx \right) P}{\pi E},$$

następnie przypisujemy odpowiednim zmiennym wartości liczbowe i obliczymy wartość pokazanego wyżej wyrażenia.

`P:10000;`

`E:2*10^11;`

`l:0.3;`

`A:0.25*%pi*10^-4;`

`P*1/(3*E*A)+(8*P/(%pi*E))*integrate(1/(0.01+x^2)^2, x,0,0.1);`

Po wykonaniu ostatniej instrukcji otrzymujemy wartość wydłużenia

$$\Delta l = \frac{4.5707963267948963 \times 10^{-4}}{\pi} \approx 1,46 \cdot 10^{-4} m.$$

Wyznaczenie energii potencjalnej sprężystości, przy rozciąganiu, polega na wykorzystaniu ogólnej zależności

$$U = \sum \int \frac{N_x^2 dx}{2EA_x}. \quad (1.1.7)$$

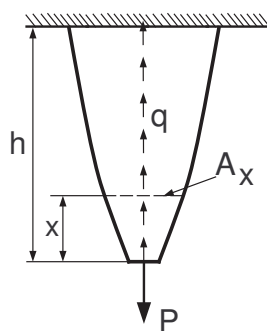
W naszym przykładzie w wyniku porównania zal. 1.1.5 i 1.1.7 możemy napisać

$$U = \frac{N_x \Delta l}{2} = 0,73J. \quad (1.1.8)$$

### 1.1.3. Odształcenia poprzeczne, zmiana objętości

#### Przykład 3

Znaleźć odkształcenie całkowite  $\varepsilon_x$ , zmianę przekroju poprzecznego  $\frac{\Delta A_x}{A_x}$  oraz zmianę objętości  $\Delta V$  pręta pokazanego na rysunku 1.4, jeśli znamy  $P$ ,  $q$ ,  $l$ ,  $A_x$ ,  $E$ ,  $\nu$ . Zgodnie z zależnościami (1.1.1) i (1.1.3) odpo-



Rys. 1.4.

wiednie wartości siły wewnętrznej  $N_x$  i naprężenia  $\sigma_x$  w dowolnym przekroju  $A_x$  wyrażają się zależnościami:

$$N_x = P + qx, \quad (1.1.9)$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A_x} = \frac{P + qx}{A_x}. \quad (1.1.10)$$

Do wyznaczenia odkształcenia  $\varepsilon_x$  wykorzystamy prawo Hooke'a

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.1.11)$$

obliczona wartość odkształcenie liniowego  $\varepsilon_x$  wyraża się więc zależnością

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P + qx}{EA_x}. \quad (1.1.12)$$

Zmiana przekroju poprzecznego pręta obliczona może być z ogólnej zależności

$$\frac{\Delta A}{A} \approx -2\nu\varepsilon = -2\nu\frac{\sigma}{E} \quad (1.1.13)$$

Po podstawieniu do zależności (1.1.13) zależności (1.1.10) otrzymujemy

$$\frac{\Delta A_x}{A_x} = -2\nu \left[ \frac{P + qx}{EA_x} \right]. \quad (1.1.14)$$

Wyznaczenie zmiany objętości wymaga postawienia do ogólnej zależności (1.1.15)

$$\Delta V = \frac{1 - 2\nu}{E} \sum \int N_x dx, \quad (1.1.15)$$

wyrażenia (1.1.9) podającego wartości siły wewnętrznej  $N_x$ , ostatecznie otrzymujemy:

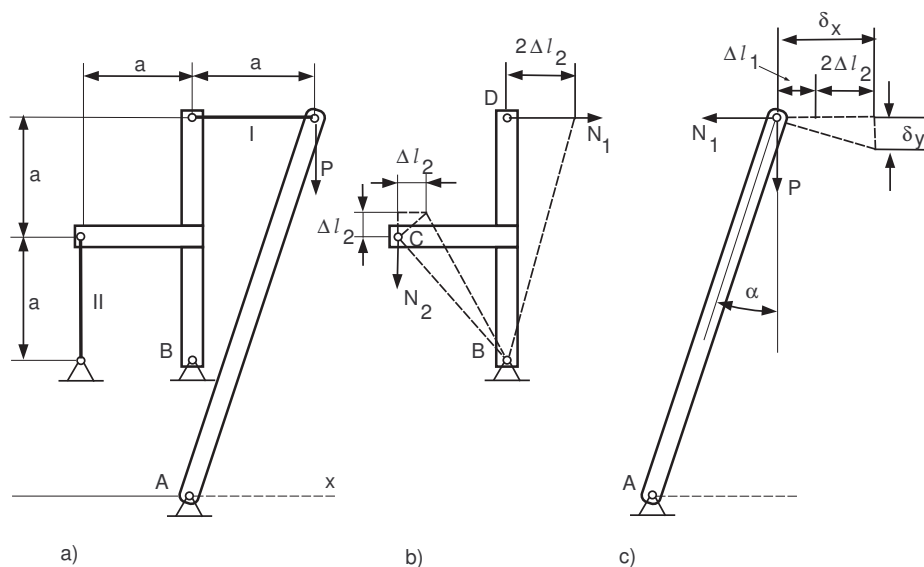
$$\Delta V = \frac{1 - 2\nu}{E} \int_0^l N_x dx = \frac{1 - 2\nu}{E} \int_0^l (P + qx) dx = \frac{1 - 2\nu}{E} \left( P + \frac{ql}{2} \right) l. \quad (1.1.16)$$

#### 1.1.4. Przemieszczenia punktów układów prętowych

##### Przykład 4

Dla układu prętowego pokazanego na rys. 1.5 określić przemieszczenia pionowe  $\delta_y$  oraz poziome  $\delta_x$  punktu przyłożenia siły  $P$ . Wielkościami znanymi są:  $P, a, E_1, A_1, E_2, A_2$ . Punktem wyjścia do wyznaczenia poszukiwanych wielkości jest myślowe rozłożenie układu pokazanego na rys. 1.5 a na dwa niezależne człony pokazane na rysunkach 1.5 b i c. Podziału dokonujemy rozcinając układ w poprzek odkształcalnych cięgien  $I$  i  $II$ . Oddziaływanie usuniętych fragmentów zastępujemy siłami wewnętrznymi  $N_1$  i  $N_2$ .

Z warunków równowagi wydzielonych układów obliczanych względem



Rys. 1.5.

punktów  $A$  i  $B$  wyznaczamy poszukiwane wartości sił wewnętrznych w prętach

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow N_1 = \frac{P}{3} \quad (1.1.17)$$

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow N_2 = \frac{2P}{3} \quad (1.1.18)$$

Wydłużenia obu prętów znajdujemy posługując się nieco zmodyfikowaną wersją prawa Hooke'a (1.1.3 i 1.1.5)

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{3E_1A_1}, \quad (1.1.19)$$

$$\Delta l_2 = \frac{2Pa}{3E_2A_2}. \quad (1.1.20)$$

Korzystając z rys. 1.5b i c znajdujemy poziome przemieszczenie punktu  $C$  równe  $\Delta l_2$  oraz przemieszczenie prostopadłe do linii  $BC$ :  $\delta_c = \Delta l_2 \sqrt{2}$ .

Poziome przemieszczenie punktu  $D$  wynosi:  $\delta_D = \delta_C \left( \frac{2a}{a} \sqrt{2} \right) = 2\Delta l_2$ .

Poziome przemieszczenie punktu przyłożenia siły  $P$  składa się z poziomego przemieszczenia punktu  $D$  oraz wydłużenia pręta  $I$

$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2A_2} + \frac{Pa}{3E_1A_1} = \frac{Pa}{3} \left( \frac{4}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1} \right). \quad (1.1.21)$$

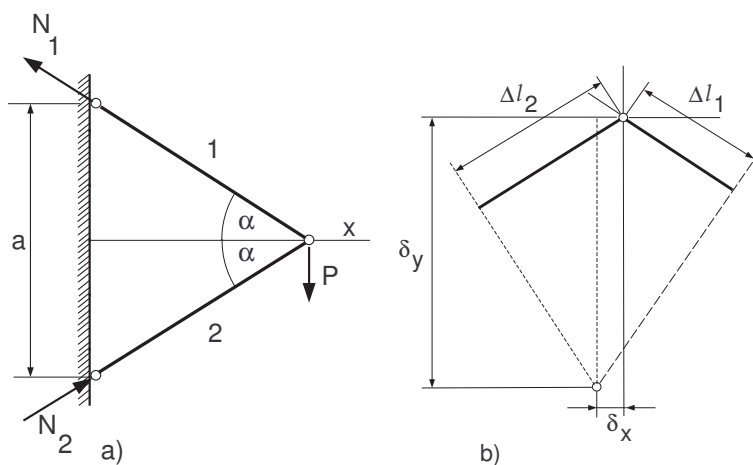
Przemieszczenie pionowe punktu przyłożenia siły  $P$  obliczamy z:

$$\delta_y = \delta_x \operatorname{tg} \alpha = \delta_x \frac{a}{3a} = \frac{Pa}{9} \left( \frac{4}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1} \right). \quad (1.1.22)$$

### 1.1.5. Sprawdzanie wytrzymałości

#### Przykład 5

Dla układu prętowego pokazanego na rysunku 1.6 znaleźć pola przekroju poprzecznego  $A_1$  i  $A_2$  prętów wiedząc, że przemieszczenie punktu przyłożenia siły  $P = 1 \text{ kN}$  wynosi  $[\delta_{x_{gr}}] = \delta_{y_{gr}} = 1.3 \text{ mm}$ . Dodatkowe dane to wytrzymałość prętów  $I$  i  $II$  na rozciąganie  $k_{rcI} = 1000 \text{ MPa}$  i  $k_{rcII} = 100 \text{ MPa}$  oraz odpowiednie moduły Younga  $E_1 = 200000 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = 10000 \text{ MPa}$ . Kąt  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 1 \text{ m}$ .



Rys. 1.6.

Z warunków równowagi wyznaczamy wartości sił wewnętrznych ( $N_1$  i  $N_2$ ) w prętach

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= -N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0 \longrightarrow N_1 = N_2 = N, \quad (1.1.23) \\ \sum P_{iy} &= -N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha + P = 0 \longrightarrow N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.\end{aligned}$$

Korzystając z definicji naprężenia normalnego (1.1.3) wyliczamy minimalne wartości pól przekrojów prętów:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{N}{k_{rcI}} = 100 \text{ mm}^2, \quad (1.1.24) \\ A_2 &= \frac{N}{k_{rcII}} = 1000 \text{ mm}^2.\end{aligned}$$

Prawo Hooke'a (1.1.5) pozwala nam wyliczyć wydłużenia poszczególnych prętów

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \frac{Na}{E_1 A_1} = 0.5 \text{ mm}, \quad (1.1.25) \\ \Delta l_2 &= \frac{Na}{E_2 A_2} = 1 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Na podstawie zależności geometrycznych pokazanych na rysunku 1.6b możemy znaleźć związki pomiędzy wydłużeniami poszczególnych prętów a przemieszczeniami punktu przyłożenia siły  $P$ . Rozwiązując układ równań (1.1.26) otrzymamy poszukiwane wartości przemieszczeń (1.1.27)

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \delta_y \sin \alpha - \delta_x \cos \alpha, \\ \Delta l_2 = \delta_y \sin \alpha + \delta_x \cos \alpha. \end{cases} \quad (1.1.26)$$

$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2 \sin \alpha}, \quad (1.1.27)$$

$$\delta_x = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2 \cos \alpha}. \quad (1.1.28)$$

Uzyskane po podstawieniu wartości liczbowych wartości przemieszczeń  $\delta_x = 0.289 \text{ mm}$  i  $\delta_y = 1.5 \text{ mm}$ . Łatwo spostrzec, że wartość jednej ze składowych przemieszczenia jest większa ( $\delta_y > \delta_{ygr}$ ) od tej zadanej na początku. Oznacza to konieczność modyfikacji pola powierzchni  $A_2$



przy zachowaniu pola powierzchni  $A_1$ . Korzystając z zależności (1.1.27) zapisanej tak jak to pokazano niżej

$$\delta_y = \frac{1}{2 \sin 30^\circ} \times (\Delta l_1 + \Delta l_2) \leq \delta_{ygr}. \quad (1.1.29)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 A_2} \leq 0,08, \quad (1.1.30)$$

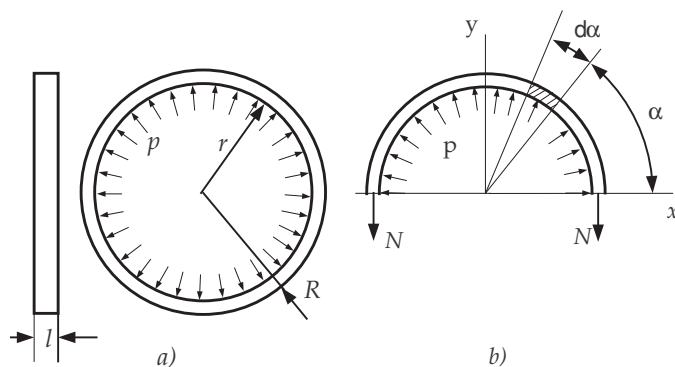
skąd

$$A_2 \geq \frac{Na}{E_2 0,08} = 1250 \text{ mm}^2. \quad (1.1.31)$$

Zmodyfikowana wartość naprężenia w pręcie  $II$  wynosi  $\sigma_{II} = 80 \text{ MPa}$ . Skorygowane wartości przemieszczeń obliczone z zależności (1.1.27 i 1.1.28) wynoszą:  $\delta_x = 0.173 \text{ mm}$  i  $\delta_y = 1.3 \text{ mm}$ .

### Przykład 6

Pierścień sprężysty (rys. 1.7a) o promieniu wewnętrznym  $r = 100 \text{ mm}$  i zewnętrznym  $r = 101 \text{ mm}$  oraz wysokości  $l$  poddano działaniu ciśnienia wewnętrznego  $p = 2 \text{ MPa}$ . Znaleźć zmianę promienia  $\Delta r$  oraz współczynnik bezpieczeństwa  $n_b$  jeśli pierścień zbudowano z materiału o module Younga  $E = 200000 \text{ MPa}$  oraz granica plastyczności tego materiału wynosi  $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$ .



Rys. 1.7.

Znalezienie sił wewnętrznych w pierścieniu wymaga jego rozcięcia na dwie części (rys. 1.1.32b).

Z równań równowagi, połówki pierścienia, względem osi  $Y$  otrzymujemy wyrażenie na siłę wewnętrzną  $N$

$$N = \int_0^{\pi/2} p l r \sin \alpha d\alpha = p l r. \quad (1.1.32)$$

Naprężenie normalne w ściance pierścienia jest

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{p l r}{(R - r)l} = 200 \text{ MPa}. \quad (1.1.33)$$

Współczynnik bezpieczeństwa obliczamy jako stosunek naprężenia dopuszczalnego  $\sigma_e$  do obliczonego naprężenia normalnego  $\sigma$

$$n_b = \frac{\sigma_e}{\sigma} = 1,5. \quad (1.1.34)$$

Powiększenie promienia  $\Delta r$  obliczymy wykorzystując prawo Hooke'a

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1.1.35)$$

po podstawieniach i przekształceniu otrzymujemy odkształcenie

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r}, \quad (1.1.36)$$

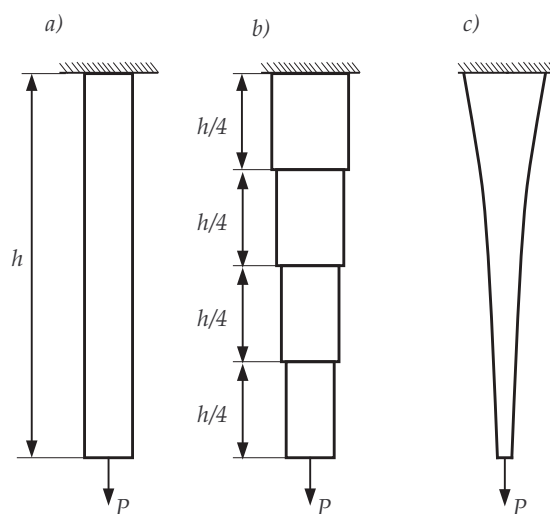
a następnie zmianę promienia

$$\Delta r = \frac{p r^2}{E(R - r)} = 0,1 \text{ mm}. \quad (1.1.37)$$

## 1.1.6. Wpływ ciężaru własnego

## Przykład 7

Określić pole powierzchni przekroju  $A_n$ , ciężar własny  $Q_n$  oraz całkowite wydłużenie  $\Delta l_n$  pręta o stałym przekroju (rys. 1.8 a). Znaleźć największe pole przekroju  $A_{st}$ , ciężar  $Q_{st}$  i całkowite wydłużenie  $\Delta l_{st}$  czterostopniowego pręta o odcinkach o jednakowej długości (rys. 1.8 b). Wyznaczyć maksymalny przekrój  $A_r$ , ciężar  $Q_r$  i całkowite wydłużenie  $\Delta l_r$  pręta o stałej wytrzymałości (rys. 1.8 c). Dane obciążenie  $P$ , ciężar właściwy  $\gamma$ , wytrzymałość na rozciąganie  $k_{rc}$ , moduł Younga  $E$ , i długość  $h$ .



Rys. 1.8.

Dla pręta o stałym przekroju (rys. 1.8 a) siła wewnętrzna  $N_x$  wyznaczona w odległości  $x$  od swobodnego końca przyjmuje postać

$$N_x = P + \gamma A_n x, \quad (1.1.38)$$

naprężenie normalne obliczamy z

$$\sigma_x = \frac{P}{A_n} + \gamma x. \quad (1.1.39)$$

Ponieważ pręt osiąga maksymalny ciężar dla  $x = h$  oraz naprężenie  $\sigma \leq k_{rc}$  po podstawieniu i prostym przekształceniu wzoru (1.1.39) otrzymujemy zależność (1.1.40) pozwalającą wyznaczyć poszukiwaną wartość pola przekroju

$$A_n = \frac{P}{k_{rc} - \gamma h}. \quad (1.1.40)$$

Ciężar pręta obliczamy z zależności  $Q_n = \gamma A_n h$ . Całkowite wydłużenie obliczamy z

$$\Delta h_n = \frac{h}{EA} \left( P + \frac{\gamma Ah}{2} \right). \quad (1.1.41)$$

Dla pręta stopniowanego (rys. 1.8 b) pole powierzchni  $A_i$  każdego stopnia pręta wyznaczamy z ogólnej zależności

$$A_i = \frac{P k_{rc}^{i-1}}{(k_{rc} - \gamma h_1)(k_{rc} - \gamma h_2)(k_{rc} - \gamma h_3) \dots (k_{rc} - \gamma h_i)}, \quad (1.1.42)$$

która przyjmuje szczególną postać dla stopnia o maksymalnym polu przekroju

$$A_{st} = \frac{P k_{rc}^3}{\left( k_{rc} - \gamma \frac{h}{4} \right)^4}. \quad (1.1.43)$$

Ciężar obliczamy z  $Q_{st} = k_{rc} A_{st} - P$ .

Całkowite wydłużenie obliczamy z ogólnej zależności

$$\Delta h_{st} = \frac{k_{rc}}{E} \sum h_i \left( 1 - \frac{\gamma h_i}{2 k_{rc}} \right), \quad (1.1.44)$$

$$\Delta h_{st} = \frac{k_{rc} h}{E} \left( 1 - \frac{\gamma l}{2 \cdot 4 k_{rc}} \right). \quad (1.1.45)$$

Dla pręta o równej wytrzymałości (rys 1.8 c) maksymalną powierzchnię pola przekroju obliczamy z zależności

$$A_x = \frac{P}{k_{rc}} e^{\frac{\gamma}{k_{rc}} x}, \quad (1.1.46)$$

która przyjmuje postać

$$A_r = \frac{P}{k_{rc}} e^{\frac{\gamma}{k_{rc}} h}. \quad (1.1.47)$$

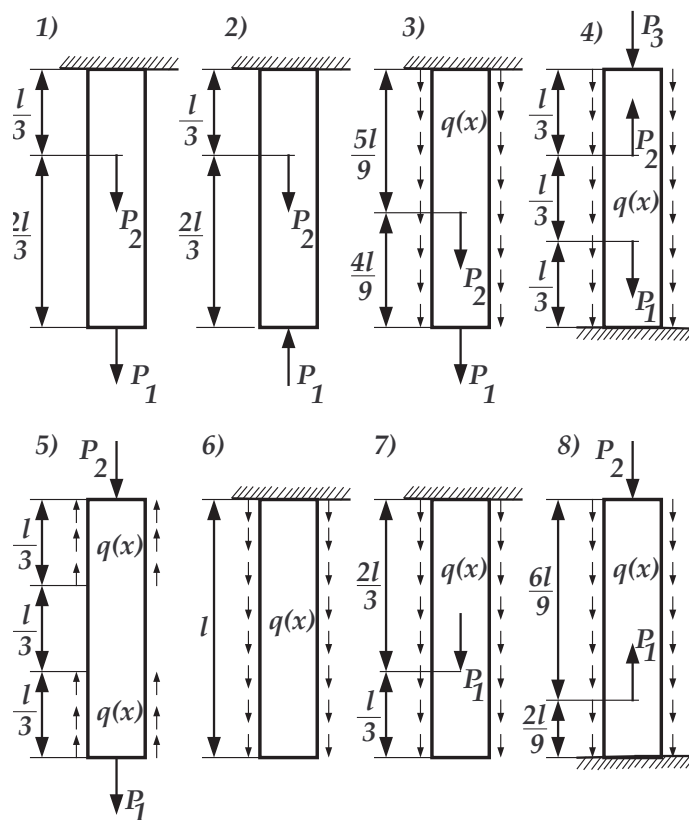
Ciężar takiego pręta obliczamy z zależności  $Q_r = k_{rc}A_r - P$ . Całkowite wydłużenia pręta o równej wytrzymałości określa

$$\Delta h_r = \frac{k_{rc}h}{E}. \quad (1.1.48)$$

## 1.1.7. Zdania do samodzielnego wykonania

Elaborat 1<sup>1</sup>

Dla prętów pokazanych na rys. 1.9 wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych  $N$ . Dane zawarto w tablicy 1.1



Rys. 1.9.

<sup>1</sup> Elaboratus (łac.)- dokładne opracowanie na piśmie wyznaczonego zagadnienia.

Tablica 1.1. Dane do elaboratu 1

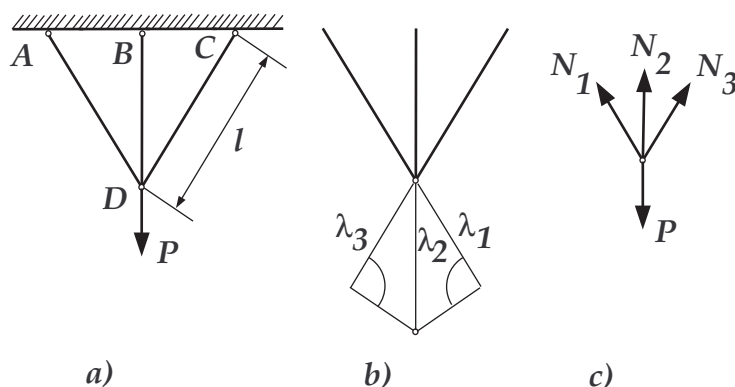
Lp.	rys.	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$q(x)$	l	Lp.	rys.	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$q(x)$	l
-	-	kN	kN	kN	$\frac{kN}{m}$	m	-	-	kN	kN	kN	$\frac{kN}{m}$	m
1	1	40	40	-	-	3	13	5	-	-	-	-	-
2	2	5	10	-	-	3	14	6	-	-	-	$(x - x^2)$	5
3	3	40	40	-	20	6	15	7	15	-	-	$\sin x$	4
4	4	6	4	6	1.5	6	16	8	14	56	-	$2^x$	
5	5	0,5	0,5	-	0,25	3	17	1	-30	-20	-	-	3
6	6	-	-	-	1.5x	3	18	2	15	-23	-	-	7
7	7	2	-	-	1.5x	3	19	3	35	-25	-	$\frac{1}{x}$	8
8	8	3	3	-	1.5x	4	20	4	6	-8	4	$\frac{x}{1+x}$	
9	1	60	-20	-	-	5	21	5	-	-	-	-	-
10	2	-120	45	-	-	3	22	6	-	-	-	$\frac{1}{(x+x^2)}$	7
11	3	30	30	-	$25(1-x)$	6	23	7	7	-	-	$\frac{1}{(x^3+x^2)}$	10
12	4	6	4	6	$12(1+x)$		24	8	4	4	-	$\frac{1}{(x^2+x)}$	4

## 1.2. Zadania statycznie niewyznaczalne

### 1.2.1. Układy prętowe i pręty utwierdzone

#### Przykład 8

**Wariant I** W węźle układu prętowego pokazanego na rys. 1.10a przyłożono siłę pewną nieznaną siłę  $P$ . Określić jej maksymalną wartość jeśli wytrzymałość na rozciąganie materiału z których wykonano pręty wynosi  $k_r = 260 \text{ MPa}$ . Pole przekroju wszystkich prętów są identyczne  $A = 200 \text{ mm}^2$ . Przyjąć współczynnik bezpieczeństwa  $n = 2$ . Kąt  $\alpha = 30^\circ$ . Rozwiązanie rozpoczynamy od wykreślenia wydłużeń prętów (rys.1.10b).



Rys. 1.10.

Łatwo można spostrzec, że pomiędzy wydłużeniami skrajnych prętów a wydłużeniem pręta środkowego zachodzi relacja

$$\lambda_2 \cos \alpha = \lambda_1, \quad (1.2.1)$$

po wykorzystaniu prawa Hooke'a (1.1.5) otrzymujemy

$$\frac{N_1 l}{EA} = \frac{N_2 l \cos^2 \alpha}{EA}. \quad (1.2.2)$$

W równaniu 1.2.2 występują dwie niewiadome  $N_1$  i  $N_2$  koniecznym jest więc zbudowanie drugiego równania w którym występują obie niewia-



dome. Wykorzystując równowagi  $\sum_1^i P_i = 0$  w odniesieniu do sił występujących w węźle otrzymujemy (rys. 1.10c)

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0. \quad (1.2.3)$$

Rozwiązując układ dwóch równań (1.2.2) i (1.2.3) otrzymujemy zależności pozwalające wyznaczyć nieznane siły wewnętrzne  $N_1$  i  $N_2$  występujących w prętach

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad (1.2.4)$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}. \quad (1.2.5)$$

Pamiętając, co widać z równań (1.2.4) i (1.2.5), że wartość siły wewnętrznej  $N_2$  będzie zawsze większa od  $N_1$  i wykorzystując warunek wytrzymałościowy

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{P}{A(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \leq \frac{k_3}{n} \quad (1.2.6)$$

możemy wyznaczyć z niego dopuszczalną wartość siły  $P$  obciążającej a analizowany układ prętowy.

**Wariant II** Załóżmy, że przy składaniu węzła pokazanego na rys. 1.10a okazało się, że pręt środkowy jest za długi o wartość  $\delta = 5 \cdot 10^{-4} \cdot l$ . Obliczyć siły wewnętrzne oraz naprężenia w prętach (zaniedbując działanie siły  $P$ ).

Przy składaniu węzła środkowy pręt musi skrócić się o wartość  $\lambda_2$  natomiast dwa skrajne pręty muszą się wydłużyć o  $\lambda_1 = \lambda_3$ . Spowoduje to skompensowanie niedokładności wykonania  $\delta$ . Pomiedzy wydłużeniami i skróceniem pręta istnieje następująca zależność

$$\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{\cos \alpha} = \delta. \quad (1.2.7)$$

Wykorzystując prawo Hooke'a (1.1.5) wyrażamy zależność 1.2.7 poprzez siły wewnętrzne  $N_1$  i  $N_2$

$$N_2 + \frac{N_1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\delta EA}{l}. \quad (1.2.8)$$

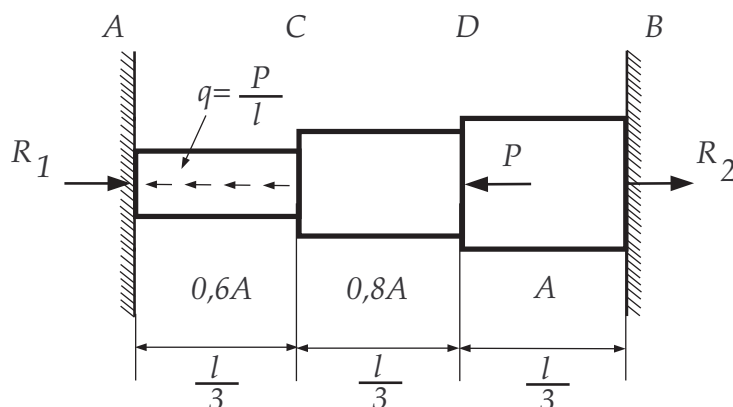
Wykorzystując dodatkowo dwa równania statyki

$$N_1 = N_3 \quad \text{i} \quad 2N_1 \cos \alpha - N_2 = 0, \quad (1.2.9)$$

możemy wyznaczyć siły wewnętrzne w prętach, a w konsekwencji wartości naprężeń.

### Przykład 8

Stopniowany pręt, obustronnie utwierdzony, jest obciążony siłą ciągłą o intensywności  $q = \frac{P}{l}$  oraz siłą skupioną  $P$ . Wyznaczyć reakcje w utwierdzeniach  $R_1$  i  $R_2$ . Wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych, naprężeń oraz wydłużeń. Dane  $P = 5 \text{ m}$ ,  $l = 0,6 \text{ m}$ ,  $A = 200 \text{ mm}^2$ ,  $E = 210000 \text{ MPa}$ . Ponieważ jak łatwo to spostrzec zadanie jest jedno-



Rys. 1.11.

krotnie statycznie niewyznaczalne musimy zbudować dodatkowe równanie wiążące przemieszczenia wybranych punktów pręta.

Siłę wewnętrzną w przekroju  $AC$  wyznaczamy z warunku równowagi

$$N_{AC} = \frac{P}{l}x - R_1. \quad (1.2.10)$$

Podobnie wyznaczamy siły wewnętrzne w pozostałych przekrojach

$$\begin{aligned} N_{CD} &= \frac{P}{3} - R_1 \\ N_{DB} &= \frac{4}{3}P - R_1 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Przemieszczenia na odcinku  $AC$  będące w każdym z przekroji funkcją współrzędnej  $x$  obliczamy z zależności

$$\Delta(x) = \int_0^x \frac{\left(\frac{P}{l}x - R_1\right)}{0,6EA} = \frac{1}{0,6EA} \left(\frac{Px^2}{2l} - R_1x\right) \quad (1.2.12)$$

Wartość wydłużenia odcinka  $AC$  wyznaczamy z (1.2.12) podstawiając  $x = \frac{l}{3}$

$$\Delta_{AC} = \frac{1}{0,6EA} \left(\frac{Pl}{18} - \frac{R_1l}{3}\right). \quad (1.2.13)$$

Wydłużenia na pozostałych odcinkach pręta obliczamy z prawa Hooke'a

$$\begin{aligned} \Delta_{CD} &= \frac{(P - 3R_1)l}{7,2EA}, \\ \Delta_{DB} &= \frac{(2P - 3R_1)l}{9EA}. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Ostatecznie korzystając z warunku nierozdzielności przemieszczeń po postawieniu (1.2.13) i (1.2.14)

$$\Delta_{AC} + \Delta_{CD} + \Delta_{DB} = 0, \quad (1.2.15)$$

wyznaczamy wartość statycznie niewyznaczalnej reakcji  $R_1$ . Drugą niewiadomą reakcję  $R_2$  wyznaczamy z warunku równowagi sił

$$R_1 - q\frac{l}{3} - P + R_2 = 0. \quad (1.2.16)$$

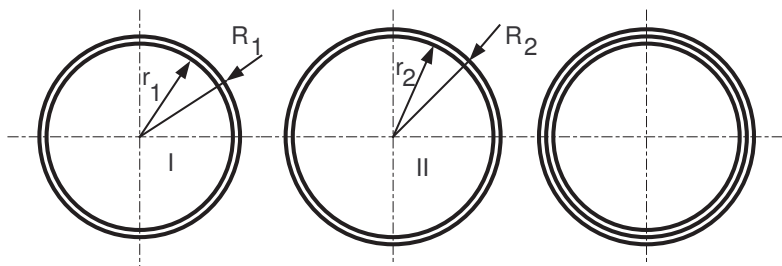
Wykresy sił wewnętrznych wykonujemy wykorzystując bezpośrednio zależności (1.2.10) i (1.2.11). Wykreślenie wykresów naprężeń normalnych wymaga ich obliczenia z poniższych zależności

$$\begin{aligned} \sigma_{AC} &= \frac{N_{AC}}{0,6A}, \\ \sigma_{CD} &= \frac{N_{CD}}{0,8A}, \\ \sigma_{DB} &= \frac{N_{DB}}{A}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Wartości wydłużeń poszczególnych odcinków pręta, potrzebnych do ich wykreślenia, obliczamy z (1.2.13) i (1.2.14).

**Przykład 9**

Na wykonaną ze stali rurę *I* o średnicy wewnętrznej  $r_1 = 40 \text{ mm}$  i średnicy zewnętrznej  $R_2 = 42 \text{ mm}$  nasunięto po jej uprzednim podgrzaniu rurę *II* o średnicy wewnętrznej  $r_2 = 41.96 \text{ mm}$  i zewnętrznej  $R_2 = 43 \text{ mm}$ . Określić naprężenia  $\sigma_I$  w ścianie rury *I* i  $\sigma_{II}$  w rurze *II*. Moduł Younga  $E = 200000 \text{ MPa}$ .



Rys. 1.12.

Wyznaczenie naprężenia w rurach można sprowadzić do analizy stanu naprężenia w pierścieniach kołowych<sup>2</sup>. Rura *II* po ochłodzeniu wywoła równomierne ciśnienie  $p$  na zewnętrznej powierzchni rury *I* ta zaś zgodnie z zasadami statyki będzie oddziaływać z takim samym ciśnieniem na rurę *II*. Wartość ciśnienia  $p$  określamy z warunku, że zmiana zewnętrznego promienia  $\Delta R_1$  rury *I* i zmiana wewnętrznej średnicy  $\Delta r_2$  rury *II* zsumowane dają wartość  $R_1 - r_2$ .

$$\Delta R_1 = \frac{p}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} \quad i \quad \Delta r_2 = \frac{p}{E} \cdot \frac{r_2^2}{R_2 - r_2} \quad (1.2.18)$$

$$\frac{p}{E} \left( \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2} \right) = R_1 - r_2 \quad (1.2.19)$$

Ostatecznie ciśnienie obliczmy z zależności

$$p = \frac{E(R_1 - r_2)}{\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}}. \quad (1.2.20)$$

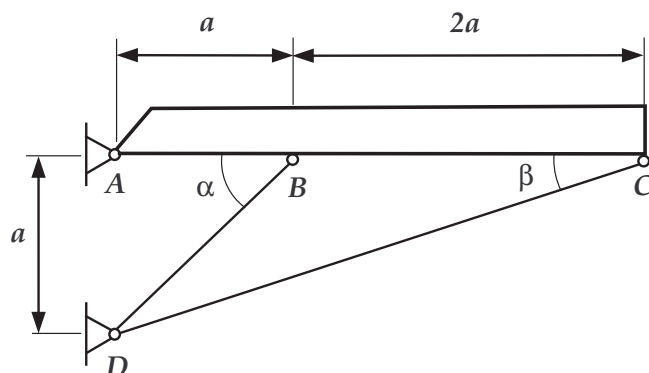
Naprężenia normalne  $\sigma_I$  i  $\sigma_{II}$  wyznaczamy z zależności

<sup>2</sup> Porównaj przykład 6

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \frac{pr_1}{R_1 - r_1}, \\ \sigma_{II} &= \frac{pr_2}{R_2 - r_2}.\end{aligned}\tag{1.2.21}$$

**Przykład 9a**

Obliczyć naprężenia wywołane wzrostem temperatury  $\Delta t = 30\text{ K}$  w stalowych wspornikach, wykonanej z duraluminium, belki  $AC$  (rys. 1.13). Nie uwzględniać sprężystej deformacji belki  $AC$  ale uwzględnić jej wydłużenie wywołane wzrostem temperatury.

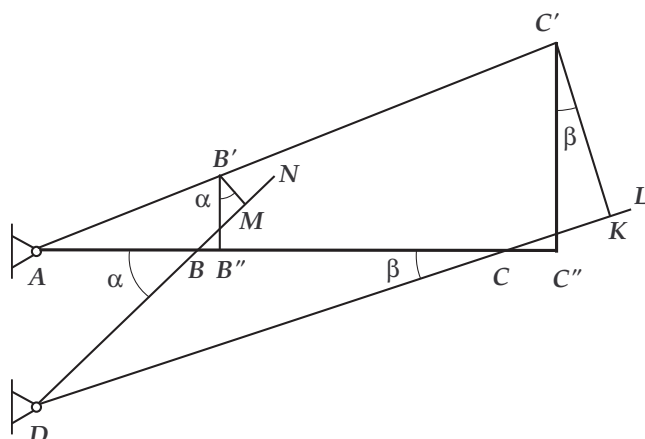


Rys. 1.13.

W wyniku nagrzewania belki punkt  $C$  przemieszcza się w poziomie o  $CC'' = \alpha_{dur}3a\Delta t$ . Podpora  $DC$  wydłuża się swobodnie o wartość  $CL = \alpha_{st}l_{DC}\Delta t$  jednak ze względu, że jej swobodne wydłużenie jest krępowane przez siłę wewnętrzną  $N_{DC}$  pręt ulegnie skróceniu o wartość  $\lambda_{DC} = \frac{N_{DC}a\sqrt{10}}{EA}$ .

Warunek nierozdzielności przemieszczeń wymaga aby po nagrzaniu belki połączenia podpór w punktach  $B$  i  $C$  zostały utrzymane. Analizując przemieszczenia poszczególnych punktów belki pokazane na rys. 1.14 otrzymujemy zależność

$$\begin{aligned}
 C'C'' &= \frac{CL - \lambda_{DC} - CC''}{\sin \beta} & (1.2.22) \\
 &= \frac{\alpha_{st}EAa\sqrt{10}\Delta t - N_{CD}a\sqrt{10} - \alpha_{dur}EA3a\Delta t \cos \beta}{EA \sin \beta}.
 \end{aligned}$$



Rys. 1.14.

Podobnie będzie dla wspornika  $DB$

$$B'B'' = \frac{\alpha_{st}EAa\sqrt{2}\Delta t - N_{DB}a\sqrt{2} - \alpha_{dur}EAa\Delta t \cos \alpha}{EA \sin \alpha}. \quad (1.2.23)$$

Wykorzystując podobieństwo trójkątów  $AC'C''$  i  $AB'B''$  mamy

$$\frac{C'C''}{B'B''} = \frac{3a}{a} = 3. \quad (1.2.24)$$

Po podstawieniu do (1.2.25) zależności (1.2.22) i (1.2.23) otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi reakcjami  $N_{DB}$  i  $N_{DC}$ .

$$\frac{\alpha_{st}EAa\sqrt{10}\Delta t - N_{CD}a\sqrt{10} - \alpha_{dur}EA3a\Delta t \cos \beta}{\alpha_{st}EAa\sqrt{2}\Delta t - N_{DB}a\sqrt{2} - \alpha_{dur}EAa\Delta t \cos \alpha} = 3 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \quad (1.2.25)$$

Drugie równanie zawierające poszukiwane niewiadome otrzymujemy z warunku równowagi momentów sił, obliczanego względem punktu  $A$

$$\sum_i M_{Ai} = N_{DB} \cdot a \sin \alpha + N_{DC} \cdot 3a \sin \beta = 0. \quad (1.2.26)$$

Rozwiązując układ równań (1.2.25) i (1.2.26) otrzymujemy poszukiwane wartości sił wewnętrznych.

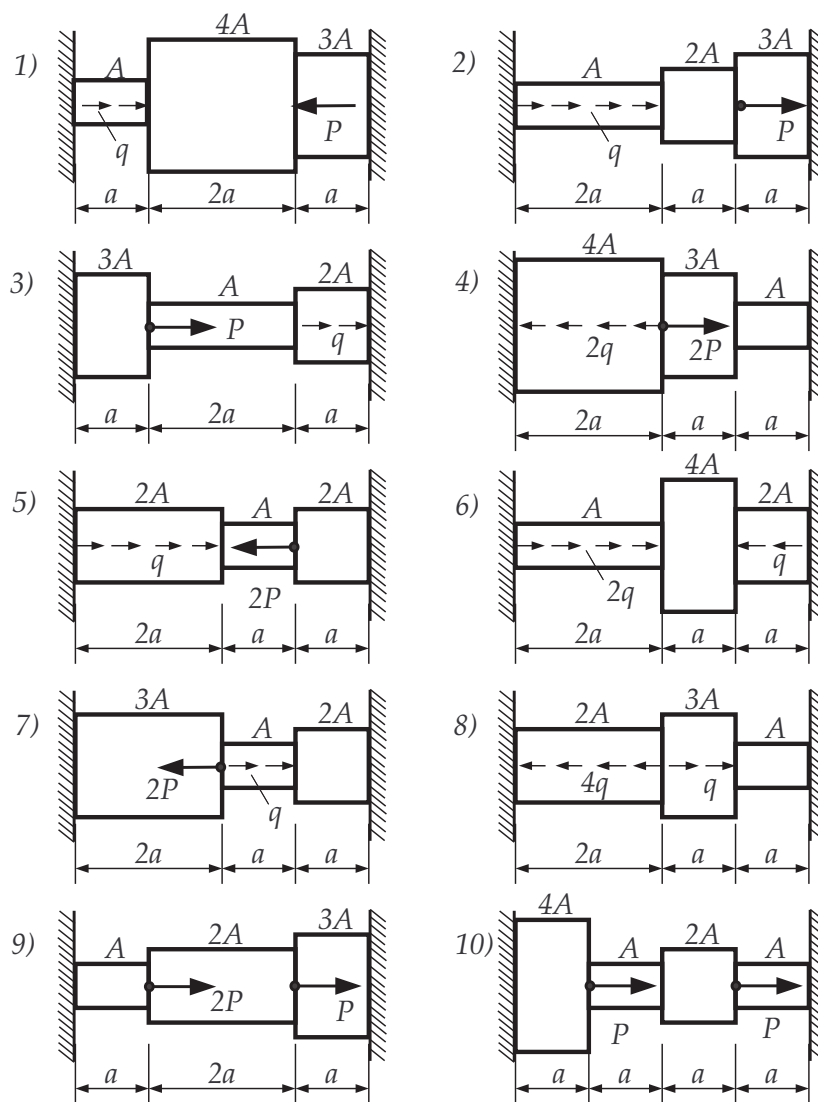
**1.2.2. Zdania do samodzielnego wykonania****Elaborat 2<sup>3</sup>**

Dla stopniowanych stalowych prętów pokazanych na rysunkach (rys. 1.15) wyznaczyć reakcje w utwierdzeniach wykreślić wykresy siła wewnętrznych  $N$ , naprężeń normalnych  $\sigma$ , i wydłużeń  $\Delta a$ . Wyznaczyć przekrój najbardziej wyężony i dobrać z warunku wytrzymałościowego  $\sigma \leq k_{rc}$  jego skorygowane pole przekroju. Dane zestawiono w tablicy 1.2.

---

<sup>3</sup> Elaboratus (łac.)- dokładne opracowanie na piśmie wyznaczonego zagadnienia.





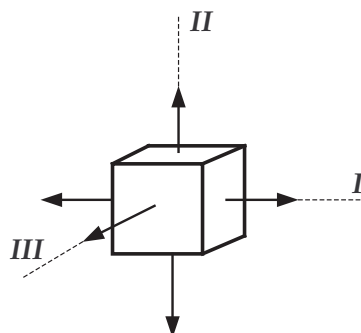
Rys. 1.15. Rysunki do elaboratu 2

Tablica 1.2. Dane do elaboratu 2

Lp	rys.	P kN	q kN/m	a m	$k_r$ MPa	$k_c$ MPa	Lp	rys.	P kN	q kN/m	a m	$k_r$ MPa	$k_c$ MPa
1	1	20	200	0,5	160	60	16	6	.	.	.	.	.
2	2	.	.	.	.	.	17	7	.	.	.	.	.
3	3	.	.	.	.	.	18	8	.	.	.	.	.
4	4	.	.	.	.	.	19	9	.	.	.	.	.
5	5	.	.	.	.	.	20	10	.	.	.	.	.
6	6	.	.	.	.	.	21	1	30	$\frac{Pq^2}{a^3}$	0,65	250	210
7	7	.	.	.	.	.	22	2	.	.	.	.	.
8	8	.	.	.	.	.	23	3	.	.	.	.	.
9	9	.	.	.	.	.	24	4	.	.	.	.	.
10	10	.	.	.	.	.	25	5	.	.	.	.	.
11	1	-50	$\frac{Pq}{a^2}$	0,3	200	150	26	6	.	.	.	.	.
12	2	.	.	.	.	.	27	7	.	.	.	.	.
13	3	.	.	.	.	.	28	8	.	.	.	.	.
14	4	.	.	.	.	.	29	9	.	.	.	.	.
15	5	.	.	.	.	.	30	10	.	.	.	.	.

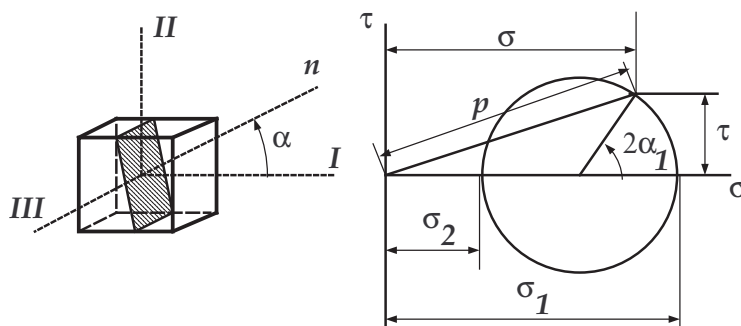
### 1.3. Koło Mohra

Jeśli na powierzchniach bocznych sześcianu, wydzielonego przy użyciu trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, pojawiają się tylko naprężenia normalne, natomiast naprężenia styczne są równe zero, to nazywamy te naprężenia głównymi ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).



Rys. 1.16.

Osie ( $I, II, III$ ) prostopadłe do płaszczyzn głównych określają kierunki główne (rys. 1.16).

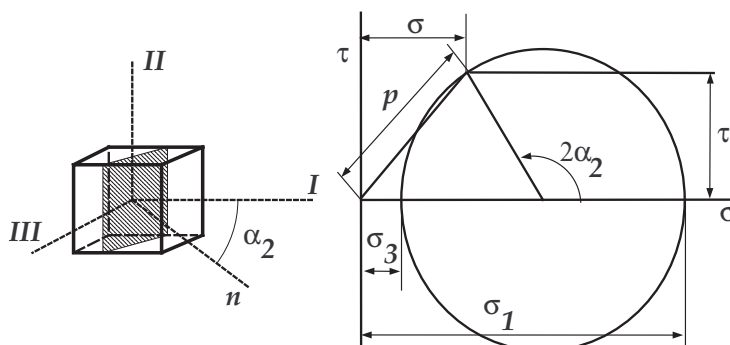


Rys. 1.17.

Normalne  $\sigma$  i styczne  $\tau$  naprężenia oraz naprężenie wynikowe  $p$  wyznaczamy w płaszczyznach równoległych do kierunku  $III$  (rys. 1.17)

z zależności

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1, \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha_1}.\end{aligned}\quad (1.3.1)$$



Rys. 1.18.

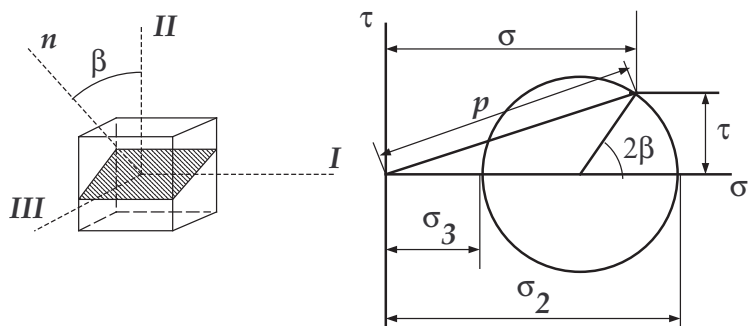
w płaszczyznach równoległych do osi *II* (rys. 1.18)

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_2, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_2, \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_2}.\end{aligned}\quad (1.3.2)$$

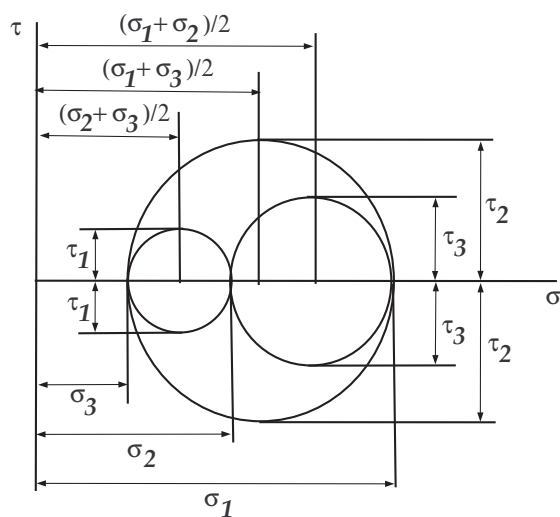
i wreszcie w płaszczyznach równoległych do osi *I* (rys. 1.19)

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta, \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \sin^2 \beta}.\end{aligned}\quad (1.3.3)$$

Powyższe naprężenia mogą być zilustrowane graficznie na diagramie kołowym nazywanym kołem Mohra (rys. 1.20). Rysunek powstał w wyniku nałożenia na jednym rysunku rysunków składowych 1.17, 1.18, 1.19. Maksymalne naprężenia tnące wyznaczamy z



Rys. 1.19.



Rys. 1.20.

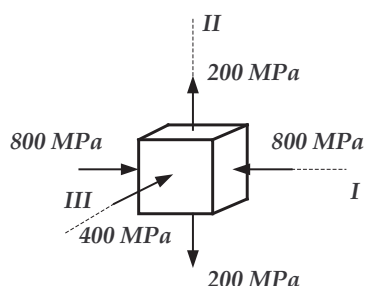
$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\
 \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \\
 \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3.4}$$

Naprężenia  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  i  $\tau_3$  skierowane są pod kątem  $45^\circ$  do odpowiednich

kierunków głównych:  $\tau_1$  występuje w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach równoległych do kierunku głównego  $I$  (rys. 1.19);  $\tau_2$  występuje w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach równoległych do kierunku głównego  $II$  (rys. 1.18);  $\tau_3$  występuje w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach równoległych do kierunku głównego  $III$  (rys. 1.17). Maksymalną wartość w sensie modułu przyjmuje  $\tau_2$ .

### Przykład 10

Dla zadanego stanu naprężenia rys. 1.21 określić maksymalne naprężenia styczne  $\tau_{1,2,3}$ , naprężenia  $\sigma'$  i  $\tau'$  na płaszczyźnie równoległej do osi  $I$  dla kąta  $\beta = 30^\circ$ ; naprężenia  $\sigma''$  i  $\tau''$  na płaszczyźnie równoległej do osi  $II$  dla kąta  $\alpha = 60^\circ$  i naprężenia  $\sigma'''$  i  $\tau'''$  na płaszczyźnie równoległej do osi  $III$  pochylonej dla kąta  $\alpha = 30^\circ$ ;



Rys. 1.21.

Naprężenia główne to  $\sigma_1 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = -400 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = -800 \text{ MPa}$ . Zgodnie z zależnością (1.3.5) obliczymy maksymalne naprężenia tnące

$$\tau_1 = \pm \frac{-400 + 800}{2} = \pm 200 \text{ MPa},$$

$$\tau_2 = \pm \frac{200 + 800}{2} = \pm 500 \text{ MPa},$$

$$\tau_3 = \pm \frac{200 + 400}{2} = \pm 300 \text{ MPa}.$$

Z zależności (1.3.3) obliczymy naprężenie  $\sigma'$  i  $\tau'$  (dla  $\beta = 30^\circ$ )

$$\sigma' = -400 \cos^2 30^\circ - 800 \sin^2 30^\circ = -500 \text{ MPa},$$

$$\tau' = \frac{-400 + 800}{2} \sin 60^\circ = 173 \text{ MPa}.$$

Z zależności (1.3.5) obliczymy naprężenie  $\sigma''$  i  $\tau''$  (dla  $\alpha = 60^\circ$ )

$$\begin{aligned}\sigma'' &= 200 \cos^2 60^\circ - 800 \sin^2 60^\circ = -550 \text{ MPa}, \\ \tau'' &= \frac{200 + 800}{2} \sin 120^\circ = 433 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Z zależności (1.3.5) obliczymy naprężenie  $\sigma'''$  i  $\tau'''$  (dla  $\alpha = 30^\circ$ )

$$\begin{aligned}\sigma''' &= 200 \cos^2 30^\circ - 400 \sin^2 30^\circ = 50 \text{ MPa}, \\ \tau''' &= \frac{200 + 400}{2} \sin 60^\circ = 260 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Naprężenia oktaedryczne obliczamy z zależności

$$\begin{aligned}\sigma_{oct} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -333 \text{ MPa}, \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 354 \text{ MPa}, \\ p_{oct} &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = 529 \text{ MPa}\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

Odształcenia główne  $\varepsilon_{1,2,3}$  obliczamy posługując się uogólnionym prawem Hooke'a (dla  $E=200000$  MPa)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

Odształcenie objętościowe obliczamy według

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\tag{1.3.7}$$

Obliczenie odkształceń postaciowych wymaga wykorzystania zależności

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_1}{G}, \\ \gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{\tau_2}{G}, \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\tau_3}{G},\end{aligned}$$

gdzie:  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$  - moduł Kirchoffa.





## Rozdział 2

# Zginanie

### 2.1. Reakcje podpór i siły przekrojowe

#### 2.1.1. Ogólny przypadek obciążenia ciągłego

Na belkę przedstawioną na rys. 2.1 działa obciążenie ciągłe o zmiennej intensywności  $q(\zeta)$ . Reakcje w podporach wyznaczamy z równania równowagi:

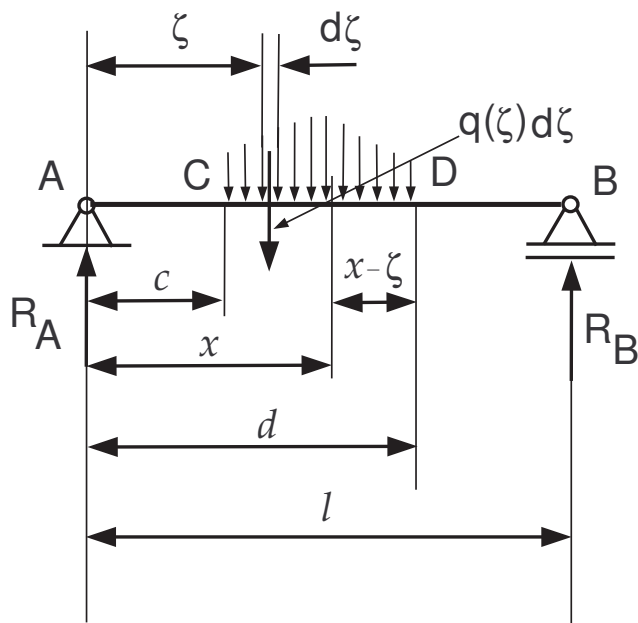
$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= -R_B \cdot l + \int_c^d q(\zeta)\zeta d\zeta = 0, \\ R_B &= \frac{1}{l} \int_c^d q(\zeta)\zeta d\zeta, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= R_A \cdot l - \int_c^d q(\zeta)(l - \zeta) d\zeta = 0, \\ R_A &= \frac{1}{l} \int_c^d q(\zeta)(l - \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w belce wymaga jej podziału na trzy odrębne przedziały.

Dla przedziału ( $0 \leq x \leq c$ ) mamy następujące wyrażenia pozwalające obliczyć siły tnące i momenty zginające.

$$\begin{aligned}T(x) &= R_A = \frac{1}{l} \int_c^d q(\zeta)(l - \zeta) d\zeta \\ M_g(x) &= R_A x = \left( \frac{1}{l} \int_c^d q(\zeta)(l - \zeta) d\zeta \right) x. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Rys. 2.1. Obciążenie ciągłe o zmiennym natężeniu  $q(\zeta)$ 

Dla przedziału ( $c \leq x \leq d$ ) mamy

$$T(x) = R_A - \int_c^x q(\zeta)\zeta d\zeta = -R_B - \int_x^d q(\zeta)\zeta d\zeta \quad (2.1.4)$$

$$M_g(x) = R_A x - \left( \int_c^x q(\zeta)(l - \zeta) d\zeta \right) x.$$

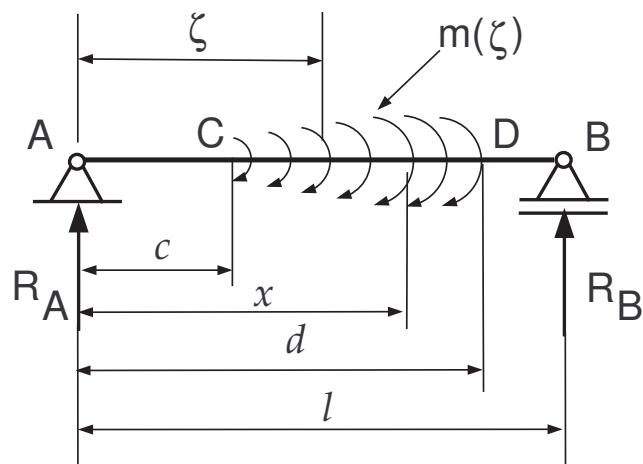
I wreszcie dla ostatniego przedziału ( $d \leq x \leq l$ )

$$T(x) = -R_B, \quad (2.1.5)$$

$$M_g(x) = R_B(l - x).$$

### 2.1.2. Ogólny przypadek obciążenia ciągłego momentem zginającym

Założmy, że na fragmencie belki (rys. 2.2) działa ciągłe obciążenie momentem zginającym o zmiennym natężeniu  $m(\zeta)$ . Reakcje w pod-



Rys. 2.2. Obciążenie ciągłe momentami zginającymi o zmiennym natężeniu  $m(\zeta)$

parciach wyznaczamy z równań równowagi.

$$\Sigma M_A = R_B \cdot l - \int_c^d m(\zeta) d\zeta = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta, \quad (2.1.6)$$

$$\Sigma P_{iy} = R_A + R_B = 0,$$

$$R_A = -R_B = -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta. \quad (2.1.7)$$

Siłę tnącą oraz moment zginający w przedziale  $(0 \leq x \leq c)$  obliczamy z

$$T(x) = R_A = -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta, \quad (2.1.8)$$

$$M_g(x) = R_A x = \left( -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta \right) x. \quad (2.1.9)$$

Dla przedziału ( $c \leq x \leq d$ ) mamy

$$T(x) = R_A = -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta, \quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned} M_g(x) &= R_A x + \int_c^x m(\zeta) d\zeta = \\ &= \left( -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta \right) x + \int_c^x m(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Dla ostatniego przedziału ( $d \leq x \leq l$ ) mamy

$$T(x) = -R_B = -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta, \quad (2.1.12)$$

$$M_g(x) = R_B(l-x) = \left( -\frac{1}{l} \int_c^d m(\zeta) d\zeta \right) (l-x). \quad (2.1.13)$$

### Program w Maximie

Prostą symulację wpływu postaci funkcji opisującej obciążenie ciągłe momentem zginającym  $m(\zeta)$ , dokonamy wykonując następujący program w Maximie.

Definiujemy postać funkcji  $m(\zeta)$ .

Budujemy równania równowagi i rozwiązujemy je.

#### 2.1.3. Obciążenie stałym ciągłym momentem zginającym

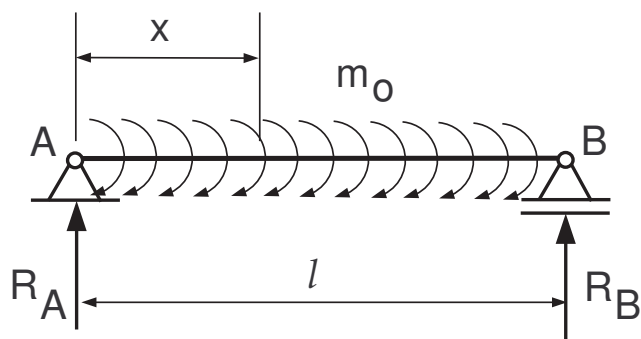
Rozważmy belkę zginaną obciążoną ciągłym momentem zginającym na całej rozpiętości belki (2.3). Obliczenia rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= R_B \cdot l + m_0 \cdot l = 0, \\ R_B &= -m_0, \\ \Sigma P_{iy} &= R_A + R_B = 0, \\ R_A &= -R_B = m_0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Siły tnące i momenty zginające w belce obliczamy z:

$$\begin{aligned} T(x) &= -R_A = -m_0, \\ M_g(x) &= R_A x - m_0 x = m_0 x - m_0 x = 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Jak łatwo dostrzec w belce nie występuje moment zginający.

Rys. 2.3. Obciążenie ciągłe momentami zginającymi o stałym natężeniu  $m_0$

[1] [2]

## **Bibliografia**

- [1] S.A Mirolubov and all. *Pasobjie k reszeniju zadać po soprofivleniju materialov*. Vyssza Szkola, 1974.
- [2] A. Umansky, A. *Sbornik zadac po soprofivleniju materialov*. Nauka, 1973.

