

Autor Tomasz Daniek,
promotor Cyprian T. Lachowicz

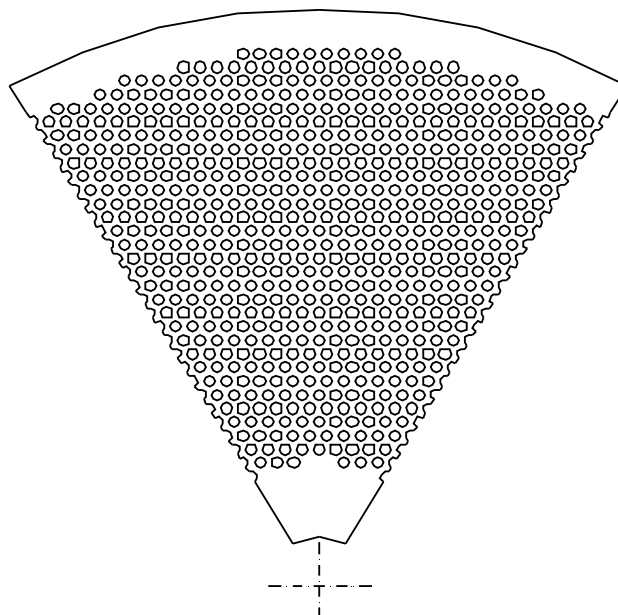
5. NUMERYCZNA ANALIZA PŁYTY SITOWEJ

5.1 Wprowadzenie.

Model geometryczny oraz obliczenia wykonane zostały za pomocą interaktywnego i darmowego programu CalculiX 0.92 działającego pod systemem operacyjnym Linux. Program ten umożliwia przeprowadzenie analizy wytrzymałościowej metodą elementów skończonych.

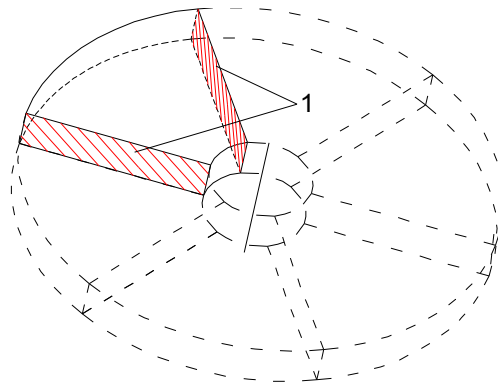
Przystępując do budowy modelu komputerowego należało przeprowadzić uproszczenia i sprowadzić analizowaną ścianę sitową do płaskiej płyty z otworami.

Przyjęcie takich założeń nie ma znaczącego wpływu na wytrzymałość natomiast ułatwia zdefiniowanie geometrii. Pomimo to występowały trudności z utworzeniem prawidłowego modelu obliczeniowego. Ich przyczyną była złożoność płyty sitowej oraz ograniczenia programu pozwalającego na analizowanie części w których liczba elementów skończonych nie przekracza 100000 a liczba węzłów 150000. Ze względu na niewystarczającą liczbę węzłów przy definiowaniu geometrii uwzględniającej całą płytę, występuje konieczność podziału wysokości płyty na jeden element skończony. Biorąc pod uwagę fakt, że płyta poddawana jest zginaniu, przyjęcie takiego założenia może niekorzystnie odbić się na wynikach obliczeń.



Rys.5.1. Widok przyjętego do analizy wycinka kołowego stanowiącego 1/6 część płyty sitowej Mimo, że analizowana ściana sitowa ze względu na heksagonalny rozkład otworów nie jest płytą kołowo – symetryczną to można dopatrzeć się w niej pewnej symetrii. Polega ona na powtarzaniu się wycinka kołowego, stanowiącego 1/4 całości. Po niewielkiej modyfikacji rozmieszczenia otworów otrzymuje się model, w którym powtarza się 1/6 część płyty. Fragment ten przedstawiono na rys.5.1.

Dzięki tak zmienionej geometrii można przeprowadzić obliczenia numeryczne z zastosowaniem dostępnej w programie opcji *CYCLIC SYMETRY MODEL [10]. Pozwala ona na przeanalizowanie całej konstrukcji zakładając, że zamodelowany jej fragment oraz przyłożone obciążenia i utwierdzenia będą się cyklicznie powtarzać. Założenia te w przypadku zmodyfikowanej ściany sitowej zostają spełnione w związku z czym jako model obliczeniowy przyjęto wycinek kołowy, który stanowi 1/6 część całej płyty. Rysunek 5.2 przedstawia schemat przyjętej geometrii.



Rys.5.2. Schemat przedstawiający sposób zamodelowania płyty do przeprowadzenia analizy z opcją *CYCLIC SYMETRY MODEL

Powierzchnie boczne 1 wskazują płaszczyzny, które zostaną powiązane z powierzchniami pozostałych pięciu elementów podczas wykonywania analizy numerycznej.

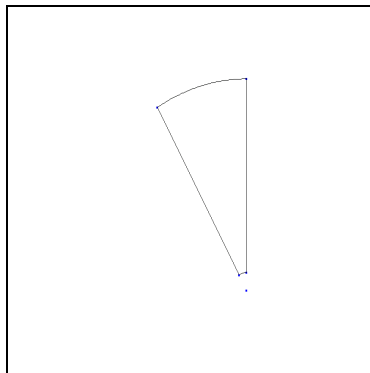
5.2 Tworzenie modelu geometrycznego.

5.2.1 Płyta perforowana z otworem centralnym.

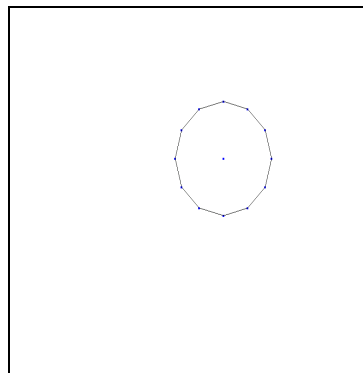
Budowanie modelu należy rozpocząć od narysowania 1/12 części płyty. Przy pomocy odpowiedniej komendy zdefiniowano punkty o współrzędnych : P001 (0,0,0); P002 (0,0,100);

P003 (0,47,0); P004 (0,550,0).

Następnie skopiowano P003 i P004 przez obrót o 30 stopni wokół osi określonej punktami P001 i P002. Po rozpięciu odpowiednich łuków otrzymano zarys wycinka kołowego co przedstawia rys.5.3.



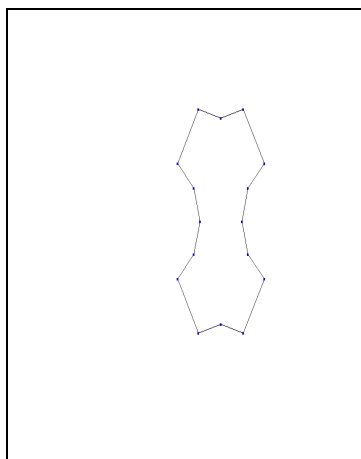
Rys.5.3. Zarys fragmentu stanowiącego 1/12 część całej płyty



Rys.5.4. Okrąg określający perforację płyty

W kolejnym kroku należy przystąpić do narysowania okręgu, który będzie definiował brzeg otworu stanowiącego perforację płyty. W tym celu tworzono następujące punkty: P005 (-15,155.9,0); P006 (-15,155.9,10); P007 (-15,161,0). Kopiując P007 wokół osi P005-P006 otrzymano szereg punktów a po połączeniu ich liniami uzyskano okrąg (rys. 5.4).

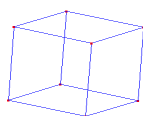
Następną czynnością jest utworzenie zbioru składającego się z nowo powstałych linii. Zbiór ten powielono o wektory: w_1 (-15,0,0); w_2 (-7.5,12.99,0); w_3 (-7.5,-12.99,0). Dzięki temu otrzymano układ okręgów z którego uzyskano kontur przedstawiony na rys.5.5. Figura ta jest podstawą do utworzenia dolnej powierzchni ściany sitowej, która zostanie następnie wyciągnięta na odpowiednią wysokość.



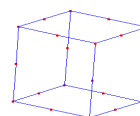
Rys. 5.5. Kontur wyznaczający powierzchnie pomiędzy otworami perforacji

Na tym etapie budowy modelu trzeba zastanowić się nad liczbą węzłów, kształtem oraz rozmieszczeniem elementów skończonych. Po automatycznym wstępnym podziale otrzymanego konturu na powierzchniowe elementy otrzymano siatkę w której ilość węzłów była za duża. Fakt ten stałby się przyczyną zbyt małego podziału wysokości płyty na elementy skończone. Z tego powodu zdecydowano się na ręczne zdefiniowanie siatki. Program posiada ograniczenia co do kształtu elementów. Do dyspozycji są dwa elementy trójwymiarowe. Jeden oznaczony jako he8 (rys.5.6.a) posiada 8 węzłów, drugi he20 – 20 węzłów (rys.5.6.b).

a



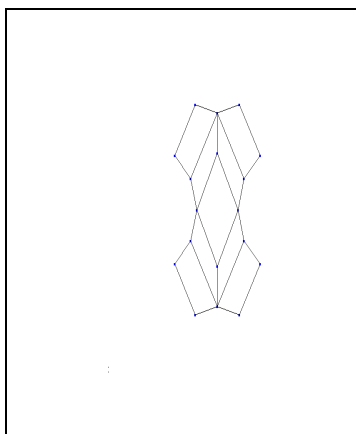
b



Rys.5.6. Rodzaje elementów skończonych a) he8, b) he20

Przy budowie modelu ze względu na mniejszą liczbę węzłów zdecydowano się na element he8. Ręczne definiowanie siatki polega na podziale istniejącego konturu na mniejsze regiony w kształcie czworokątów. W tym celu należy utworzyć dwa punkty o współrzędnych $(-15,147.5,0)$ i

(-15,138.3,0). Następnie odpowiednio połączyć je liniami (rys.5.7).

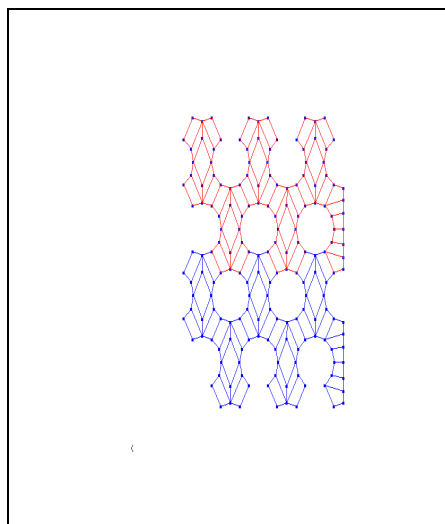


Rys. 5.7. Podział konturu na linie

Dokonując podziału trzeba zwrócić uwagę aby kąty wewnątrz każdego czworokąta były mniejsze niż 180° . W przeciwnym wypadku siatka zostanie błędnie wygenerowana.

Tym sposobem otrzymano fragment, w którym każda powierzchnia będzie podstawą sześciennego elementu skończonego. Ostatecznie, aby osiągnąć ten cel wszystkie linie tworzące powierzchnie należy podzielić na jeden segment.

Następnym etapem jest powielanie istniejących powierzchni. Jest to czynność początkowo pracochłonna. Po uzyskaniu odpowiedniej liczby segmentów zadanie to można nieco uprościć. Na rys.5.8 kolorem niebieskim zaznaczono zbiór powierzchni, który skopiowano o wektor $(0,25.98,0)$ uzyskując nowy zbiór (kolor czerwony).



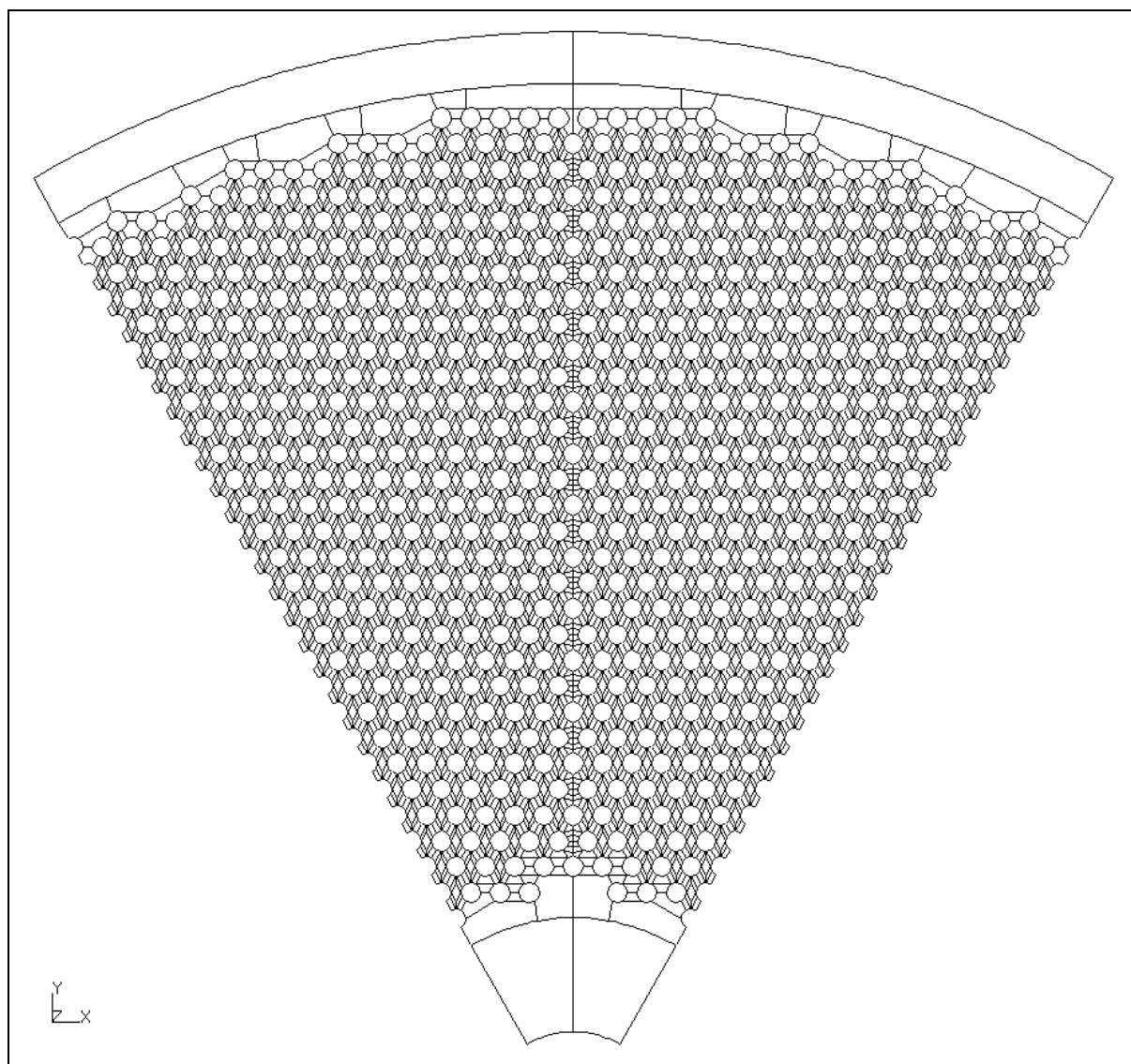
Rys. 5.8. Kopiowanie podzielonego konturu

Powielając segmenty należy dążyć do uzyskania fragmentu stanowiącego $1/12$ całej płyty.

Kolejnym krokiem jest usuwanie odpowiednich punktów i linii tak aby na brzegach uzyskać rozkład otworów zgodny z ich rozmieszczeniem w rzeczywistej płycie. Otrzymany w ten sposób zarys jest nieregularny. Aby go zmienić, dolny i górny obszar podzielono na mniejsze regiony.

Następnie na powstałych konturach utworzono powierzchnie. Generując je należy zwrócić uwagę na kolejność wskazywania linii tworzących obszar składający się z więcej niż czterech linii. Ma to istotne znaczenie na równomierne rozłożenie elementów skończonych. Ważnym czynnikiem wpływającym na kształt siatki jest podział linii na segmenty. Ich suma w obrębie jednej powierzchni przy zastosowaniu elementów $he8$ musi być liczbą parzystą.

Kolejną operacją jest skopiowanie istniejącego wycinka. Ma to na celu otrzymanie powierzchni będącej podstawą fragmentu stanowiącego $1/6$ całej płyty. Operację rozpoczęto od zdefiniowania zbioru zawierającego wszystkie utworzone powierzchnie. Następnie powielono go przez lustrzane odbicie względem płaszczyzny $y-z$. Czynnością niezbędną na tym etapie budowy modelu jest oczyszczenie go z punktów, linii oraz powierzchni, które podczas wielokrotnego kopiowania zostały na siebie nałożone. Efektem wszystkich powyższych działań jest powierzchnia przedstawiona na rys.5.9.



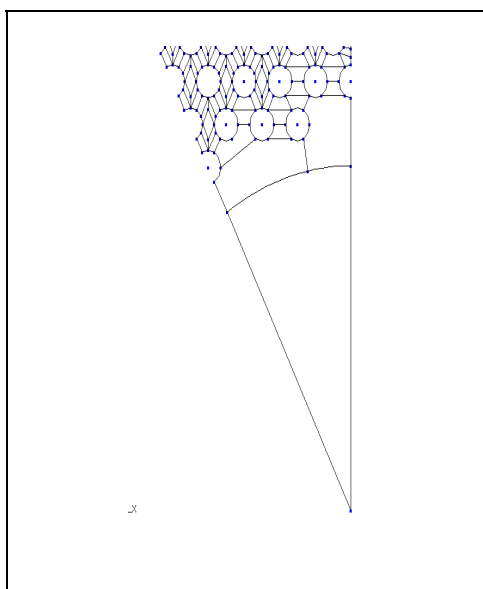
Rys. 5.9. Rozkład linii tworzących powierzchnie podstawy fragmentu stanowiącego 1/6 całej płyty

Aby uzyskać model o pewnej grubości należy uzyskaną powierzchnie wyciągnąć na odpowiednią odległość w kierunku osi z. Ostatnia operacja podczas tworzenia geometrii polega na podziale

wszystkich linii łączących dolną i górną powierzchnie na 11 segmentów co spowoduje, że wysokość płyty będzie podzielona na 12 elementów .

5.2.2 Płyta perforowana bez otworu centralnego.

W celu otrzymania modelu płyty perforowanej bez otworu centralnego trzeba dokonać modyfikacji istniejącego modelu geometrycznego. Zmiana polega na usunięciu trzech istniejących powierzchni, a na ich miejsce utworzeniu jednej mającej kształt klina, którego wierzchołek znajduje się w punkcie (0,0,0) co ilustruje rys.5.10. Kolejne operacje są analogiczne jak w przypadku poprzednim.

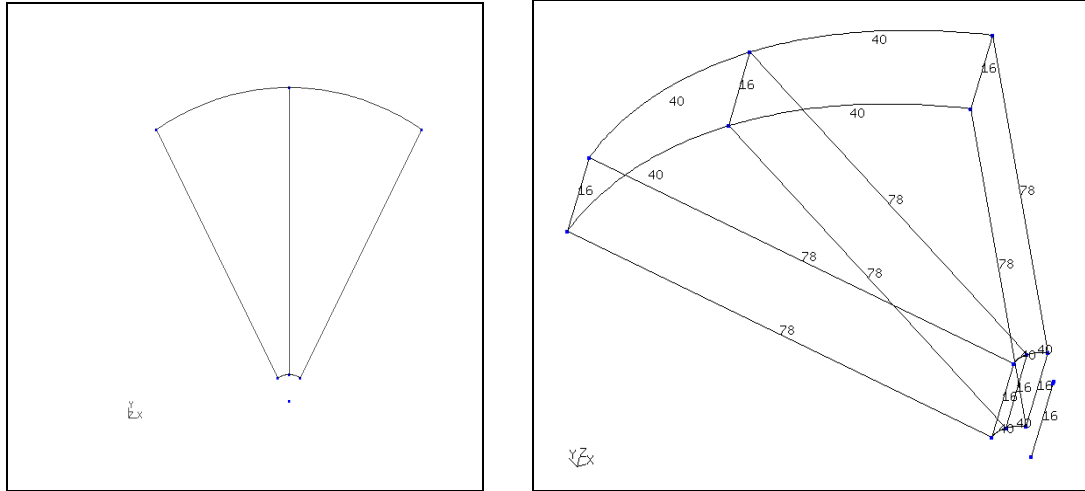


Rys. 5.10. Rozkład linii tworzących powierzchnie 1/12 płyty perforowanej bez otworu centralnego

5.2.3 Płyta nieperforowana z otworem centralnym

Dwa poniższe modele płyty nieperforowanej tworzone są celem wykorzystania ich w zadaniach testowych. Budowę rozpoczęto od zdefiniowania punktów o współrzędnych: P001 (0,47,0), P002 (0,550,0), P003 (0,0,0). Obracając powstałą linię wokół osi z przechodzącą przez punkt (0,0,0) utworzono powierzchnie stanowiącą 1/12 płyty po czym skopiowano ją przez odbicie

lustrzane względem płaszczyzny y-z. otrzymując przedstawiony na rys.5.11 zarys. Mając powierzchnie będącą podstawą płyty poprzez operacje wyciągnięcia na określoną wysokość uzyskano przestrzenny model geometryczny (rys.5.12). Liczby obok linii określają podział na segmenty.

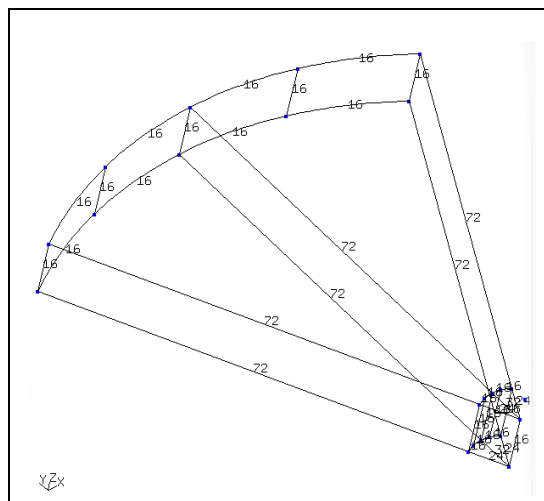
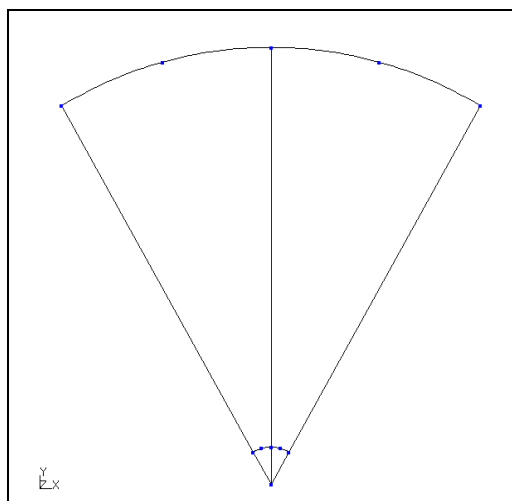


Rys. 5.11. Linie tworzące powierzchnie płyty nieperforowanej z otworem centralnym

Rys.5.12. Model przestrzenny z podziałem linii

5.2.4 Płyta nieperforowana bez otworu centralnego

W tym przypadku należy zmodyfikować model płyty nieperforowanej bez otworu tworząc nową powierzchnie i wprowadzając dodatkowe podziały linii (rys.5.13). Następnie analogicznie jak poprzednio wykorzystując operację wyciągnięcia otrzymano przedstawiony na rys.5.14 gotową płytę wraz z podziałem linii.



Rys.5.13. Linie tworzące powierzchnie płyty nieperforowanej bez otworu centralnego

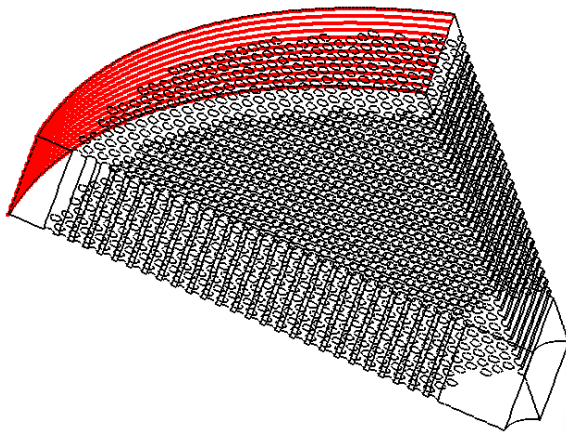
Rys.5.14. Model przestrzenny z podziałem linii

5.3 Warunki brzegowe.

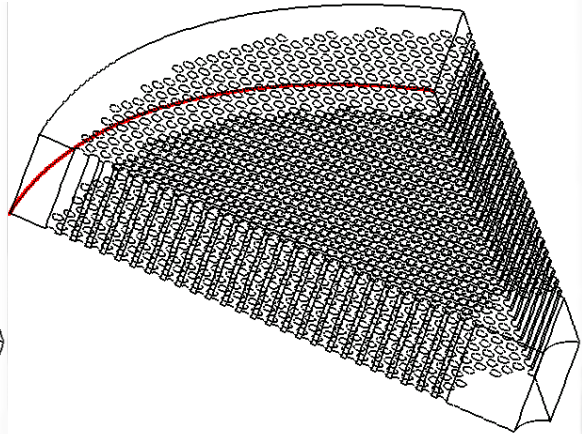
Po wygenerowaniu elementów skończonych należy określić warunki brzegowe.

Wszystkie modele występują w dwóch wariantach, jako płyty swobodnie podparte lub utwierdzone.

Definiowanie utwierdzenia polega na wybraniu wszystkich węzłów leżących na zewnętrznej powierzchni walcowej, a następnie zapisaniu ich w pliku pod odpowiednią nazwą. Dla płyty podpartej należy utworzyć zbiór składający się z węzłów tworzących dolną krawędź po czym również wysłać je do pliku. Wykorzystanie podczas analizy numerycznej opcji *CYCLIC SYMMETRY wymusza odebranie stopni swobody w cylindrycznym układzie współrzędnych. W związku z tym w przypadku płyty utwierdzonej odbiera się węzłom możliwość przemieszczenia promieniowego i osiowego wzdłuż osi z, natomiast dla płyty swobodnie podpartej tylko osiowego. Rysunki 5.15 i 5.16 przedstawiają węzły (kolor czerwony) przygotowane odpowiednio dla płyty perforowanej utwierdzonej i swobodnie podpartej

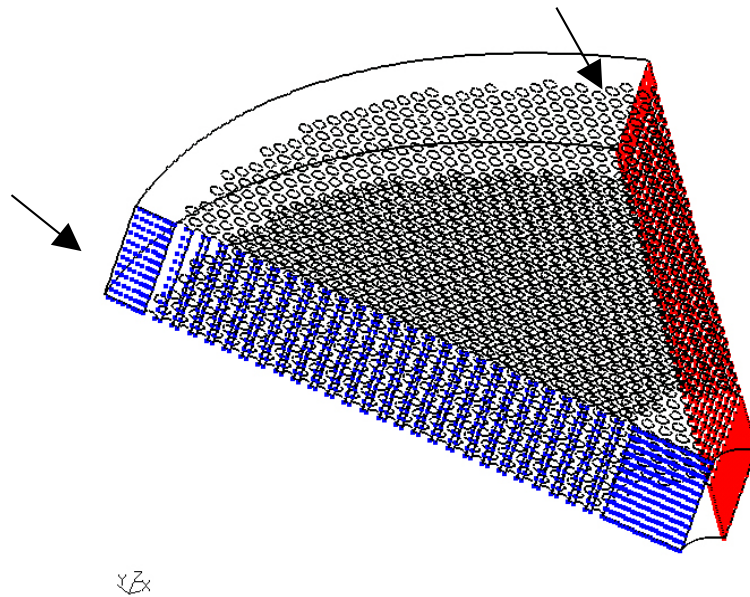


Rys.5.15. Węzły wybrane w celu utwierdzenia płyty na całej grubości



Rys.5.16. Węzły wybrane w celu podparcia płyty na zewnętrznej krawędzi

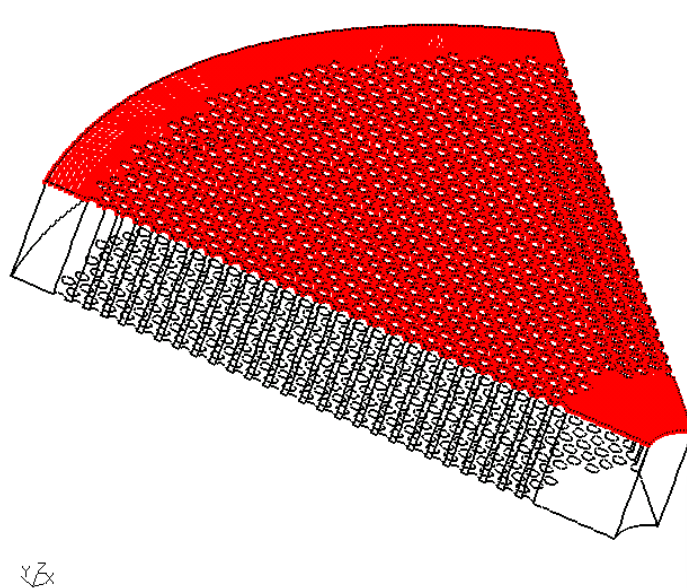
Kolejną czynnością jest wybranie węzłów należących do powierzchni, które będą ze sobą powiązane. Podczas tworzenia zbiorów trzeba zwrócić uwagę aby nie zawierały one węzłów z odebranymi stopniami swobody. Rysunek 5.17 ilustruje dwie osobno zdefiniowane powierzchnie przygotowane dla płyty perforowanej z otworem centralnym utwierdzonej. Strzałkami wskazano krawędzie na których leżą węzły utwierdzone, nie uwzględnione przy tworzeniu zbiorów.



Rys.5.17. Węzły definiujące powierzchnie przygotowane do analizy z opcją symetrii cyklicznej dla płyty perforowanej utwardzonej

5.4 Obciążenia.

Aby zdefiniować obciążenie w postaci ciśnienia należy wybrać węzły leżące na powierzchni do której ma być ono przyłożone (rys.5.18). Kolejną czynnością jest wysłanie do pliku nowo utworzonego zbioru wraz z przypisaną mu konkretną wartością obciążenia.



Rys.5.18. Węzły definiujące powierzchnie do której zostało przyłożone ciśnienie

5.5 Charakterystyka materiału.

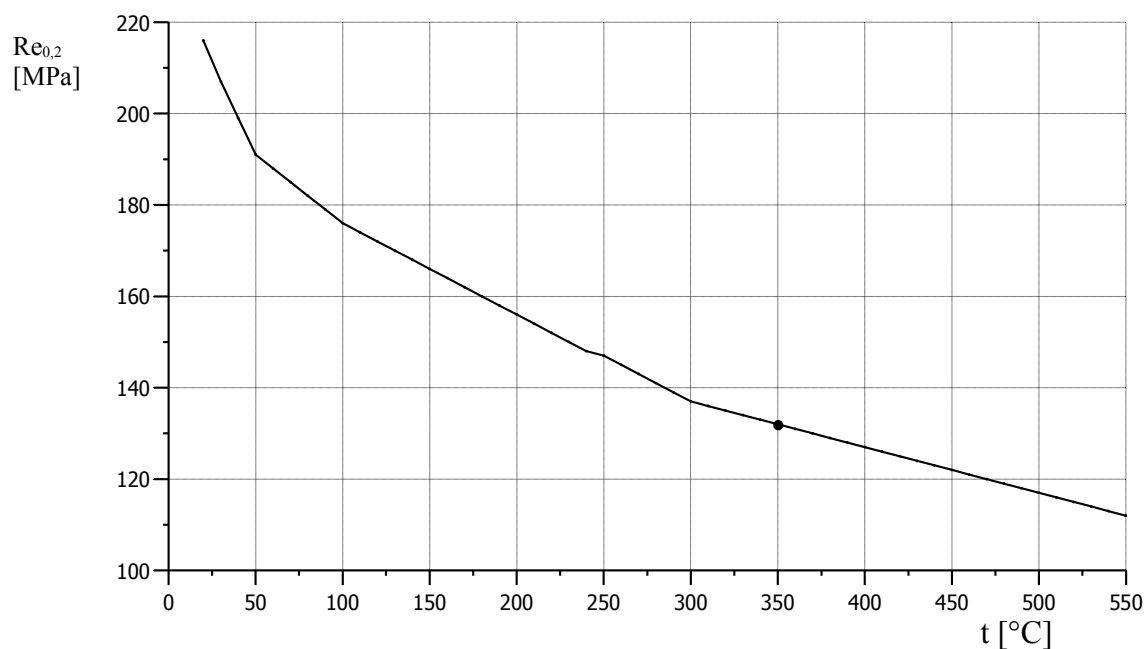
Analizę przeprowadzono dla nierdzewnej i kwasoodpornej stali oznaczonej wg. [9] jako 1H18N9T stosowanej w budowie aparatury chemicznej. Jej odpowiednikiem wg. norm europejskich EN jest stal X6 Cr Ni Ti 18-10, a wg. norm amerykańskich ANSI stal TP 321 WP 321 F 321. Rysunek 5.19 przedstawia wykres zależności granicy plastyczności od temperatury dla stali 1H18N9T. W temperaturze 350°C $Re_{0,2} = 132$ [MPa]. Tablice 5.1 i 5.2 przedstawiają odpowiednio własności wytrzymałościowe w temp pokojowej i skład chemiczny powyższej stali

Tablica 5.1. Własności wytrzymałościowe.

	R _m [Mpa]	Re [Mpa]	A ₅ %	E [Mpa]	ν
1H18N9T	510	216	38	2,1x10 ⁵	0,3

Tablica 5.2. Skład chemiczny stali.

	Zawartość składników %							
	C max.	Ma max.	Si max.	P max.	S max.	Cr	Ni	Inne składniki
1H18N9T	0,10	2,0	0,8	0,045	0,030	17,0-19,0	8,0-10,0	Ti 5x%C+0,8



Rys.5.19. Wykres funkcji granicy plastyczności $Re_{0,2}$ od temperatury dla stali 1H18N9T [11]

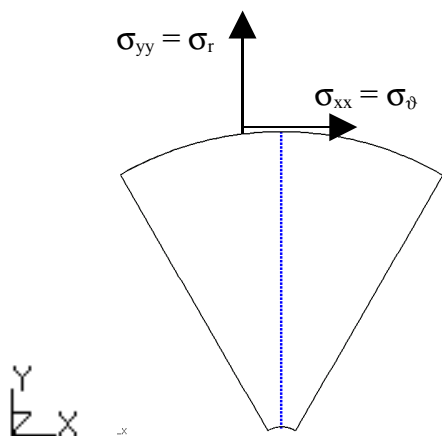
6. ZADANIA TESTOWE

6.1 Sposób przeprowadzenia analizy.

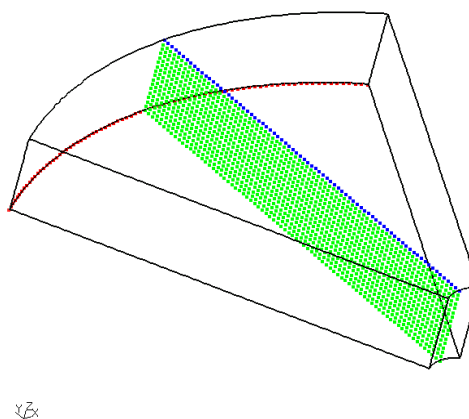
Przed przystąpieniem do analizy płyty perforowanej rozwiązano analitycznie oraz numerycznie kilka przykładowych zadań testowych. Jako model w zadaniach testowych przyjęto okrągłą płytę nieperforowaną w sześciu różnych wariantach. Dwa pierwsze przykłady zaczerpnięto z [12] gdzie wzory analityczne na naprężenia i przemieszczenia są podane w formie przybliżonej. W pozostałych czterech przykładach bezpośrednio wykorzystano wzory na naprężenia promieniowe i obwodowe dotyczące płyt kołowo – symetrycznych co pozwoliło na dokładniejszą weryfikację.

Dodatkowo uwzględniono wymiary geometryczne tj. promienie zewnętrzne i ewentualnie wewnętrzne płyt zgodne z wymiarami płyty sitowej. Wysokość została obliczona indywidualnie dla każdej płyty w zależności od jej geometrii oraz sposobu utwierdzenia. Jako materiał przyjęto stal 1H18N9T.

W celu porównania wyników otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych z wynikami uzyskanymi poprzez analizę numeryczną sporządzono wykresy naprężeń: promieniowych, obwodowych i zastępczych wg. hipotezy Hubera – Misesa w funkcji promienia płyty. Podczas obliczeń analitycznych płyt kołowo – symetrycznych zakłada się cylindryczny układ współrzędnych i wszystkie wartości wyżej wymienionych naprężeń również podane są w tym układzie. Ponieważ w programie Calculix obowiązuje kartezjański układ współrzędnych do sporządzenia wykresu wybrano węzły leżące wzdłuż osi y (rys.6.1), w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie y – z (rys.6.2).



Rys.6.1. Węzły leżące wzdłuż osi y w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz sposób interpretacji naprężeń



Rys.6.2. Widok zaznaczonej kolorem zielonym płaszczyzny y – z

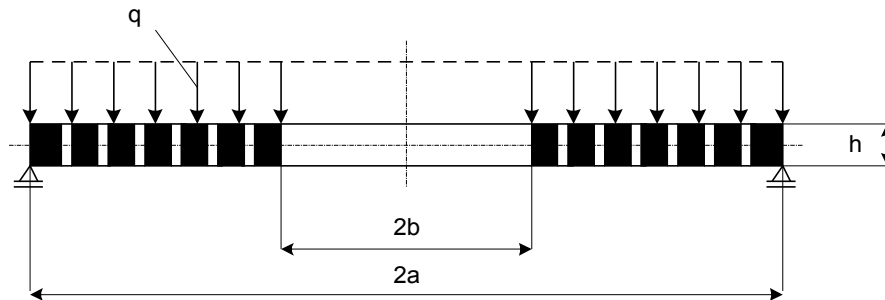
Dzięki temu dla węzłów leżących na osi y naprężenia opisane w układzie kartezjańskim jako normalne σ_{yy} są w układzie cylindrycznym naprężeniami promieniowymi σ_r , a naprężenia normalne σ_{xx} są naprężeniami obwodowymi σ_θ (rys.6.1). Ponadto należało wyeliminować wpływ swobodnego podparcia krawędziowego na naprężenia i odkształcenia. Dlatego do opracowania wyników przyjęto węzły leżące w płaszczyźnie górnej zawierającej obciążoną powierzchnię, zakładając, że płaszczyzna dolna zawiera węzły z odebranymi stopniami swobody (rys.6.2). Kolorem czerwonym zaznaczono węzły stanowiące podparcie, zielonym płaszczyznę y –

z, a niebieskim węzły leżące na górnej płaszczyźnie. Ten sam sposób wyboru węzłów dotyczy płyty utwierdzonej, dla której jednak przy sporządzaniu wykresów nie można było wyeliminować wpływu utwierdzenia na wartości węzłowe.

7. PŁYTY PERFOROWANE – SYMULACJE NUMERYCZNE.

7.1 Płyta perforowana z otworem centralnym swobodnie podparta.

W pierwszym przypadku analizie numerycznej poddano płytę perforowaną z heksagonalnym rozkładem otworów z otworem centralnym swobodnie podpartą na zewnętrznej krawędzi (rys.7.1).. Płyta obciążona jest ciśnieniem $p = 0,45$ [MPa] oraz pochodzącym od górnego wymiennika ciepła ciężarem $Q = 36000$ [kG] przenoszonym przez rurki i zamienionym na ciśnienie o wartości $0,573$ [MPa]. Sumaryczne obciążenie wynosi $q = 1,023$ [MPa].



Rys.7.1. Schemat płyty perforowanej z otworem centralnym swobodnie podpartej

Dane:

$$\begin{array}{llll} a = 550 & [\text{mm}] & h = 91 & [\text{mm}] & C_r = 0,33 \\ b = 47 & [\text{mm}] & q = 1,023 & [\text{MPa}] & C_\varnothing = 0,61 \end{array}$$

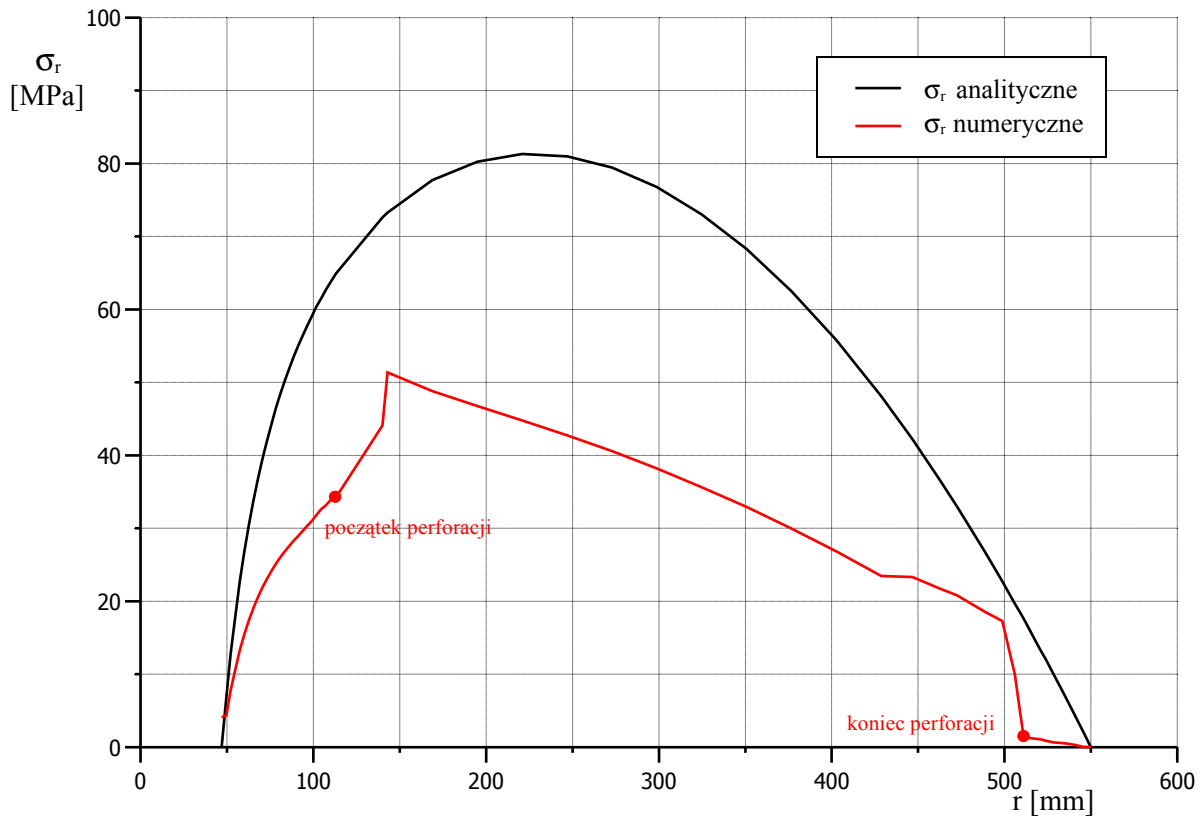
$$k_1 = \frac{q}{2}, \quad k_2 = -\frac{qb^2}{2}, \quad k_3 = 0.$$

Na podstawie wzorów (4.32) z warunków brzegowych w postaci $m_r(b) = 0$ oraz $m_r(a) = 0$ otrzymano stałe całkowania [7] (7.1), które podstawiając z powrotem do związków (4.32) pozwoliły na obliczenie natężenia momentu promieniowego i obwodowego.

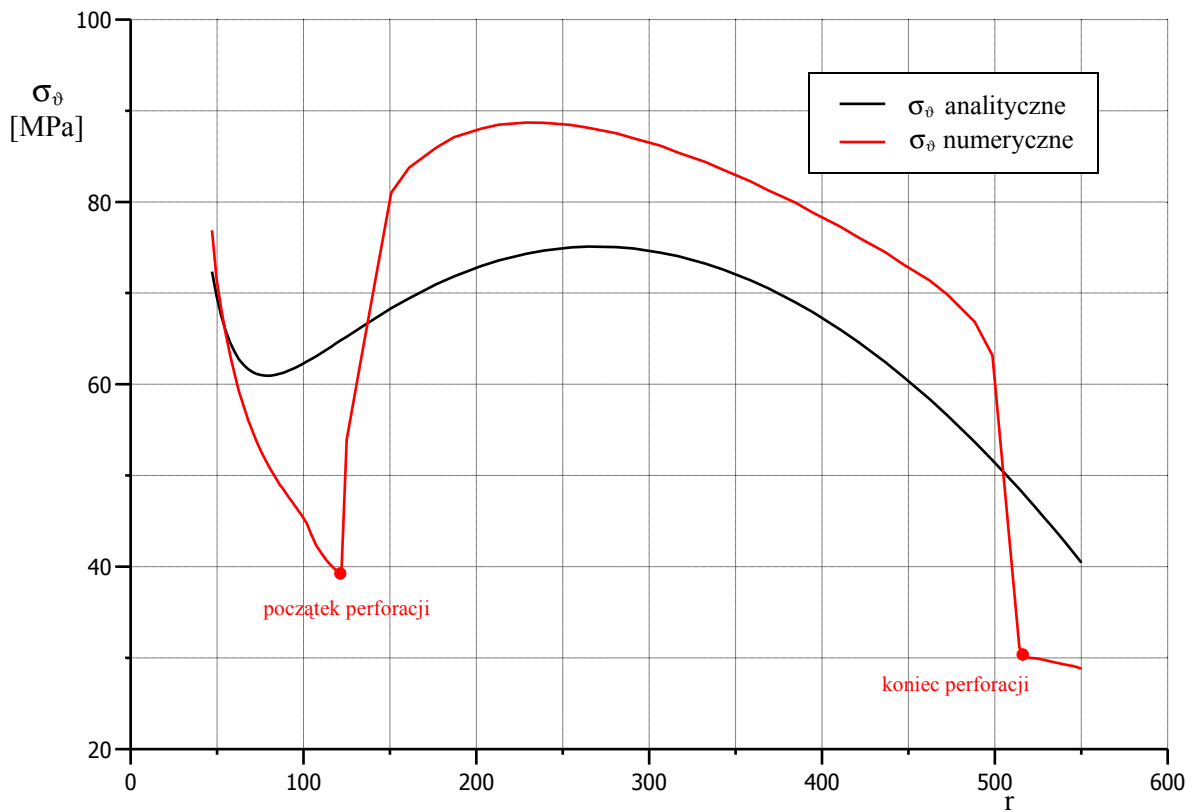
$$C_1 = \frac{ab^{\lambda_2} \left[\frac{k_1 a^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right] - ba^{\lambda_2} \left[\frac{k_1 b^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right]}{B_r (\lambda_1 + \nu) (a^{\lambda_1} b^{\lambda_2} - a^{\lambda_2} b^{\lambda_1})} \quad (7.1)$$

$$C_2 = \frac{ba^{\lambda_1} \left[\frac{k_1 b^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right] - ab^{\lambda_1} \left[\frac{k_1 a^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right]}{B_r (\lambda_2 + \nu) (a^{\lambda_1} b^{\lambda_2} - a^{\lambda_2} b^{\lambda_1})}$$

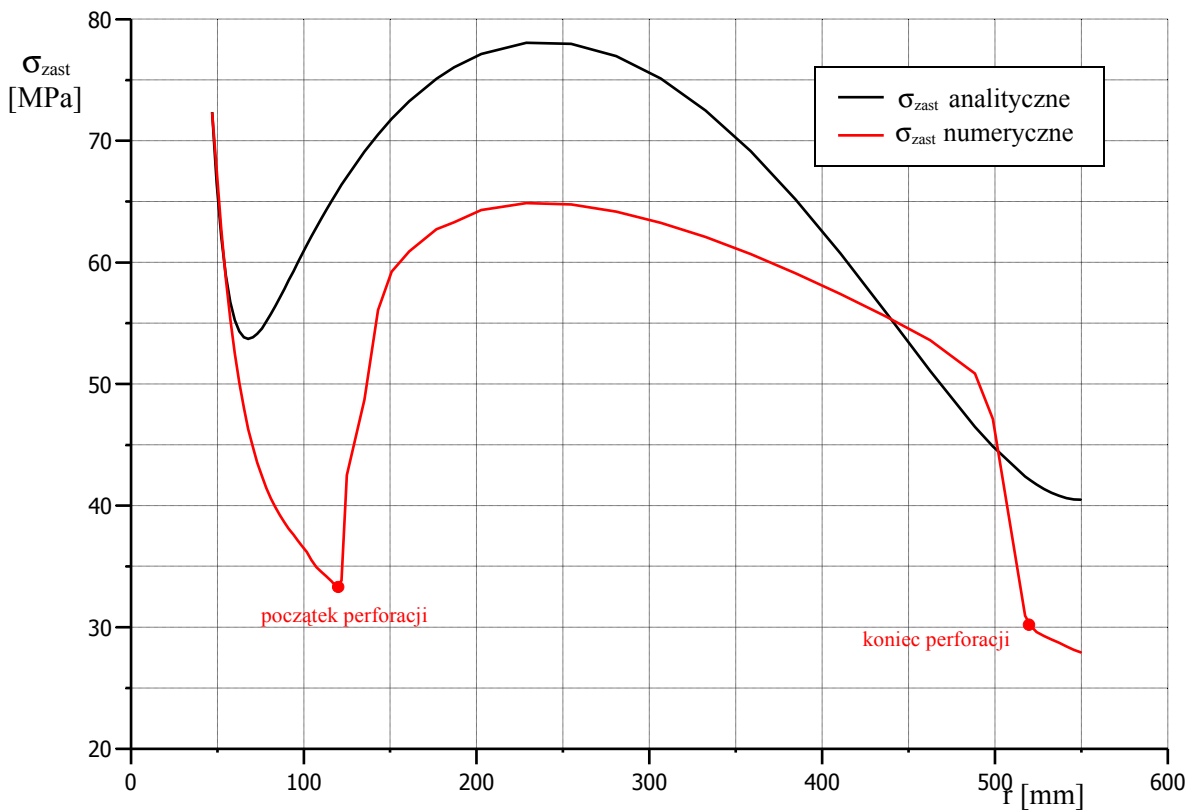
Naprężenia promieniowe i obwodowe obliczone zostały za pomocą zależności (4.34).



Rys.7.2. Wykres naprężeń promieniowych σ_r .

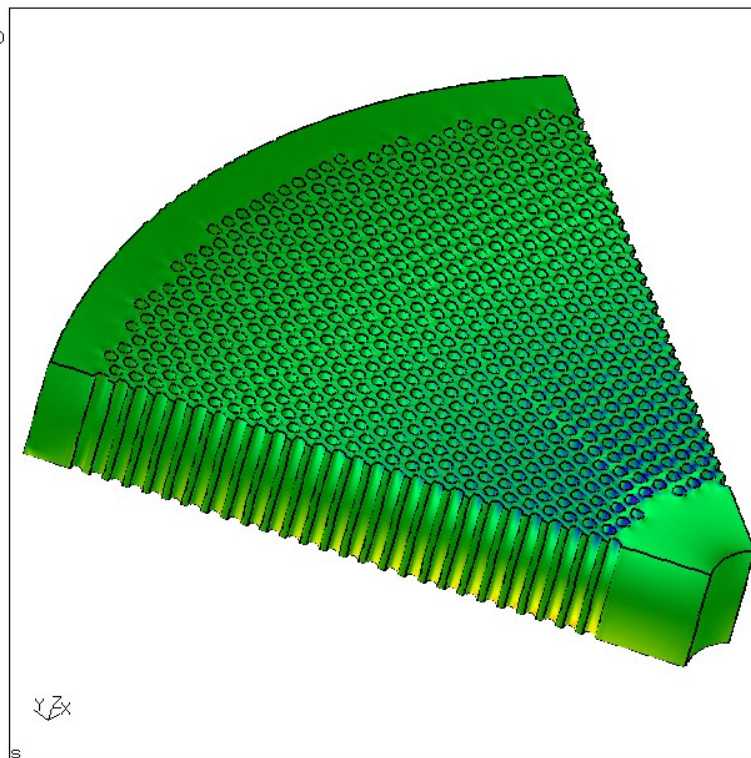
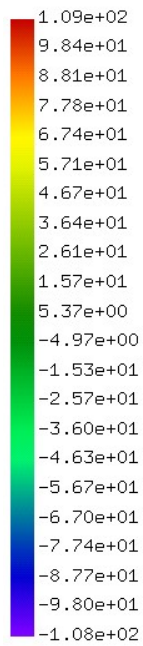


Rys.7.3. Wykres naprężeń obwodowych σ_θ



Rys.7.4. Wykres naprężeń zastępczych wg. hipotezy Hubera – Misesa

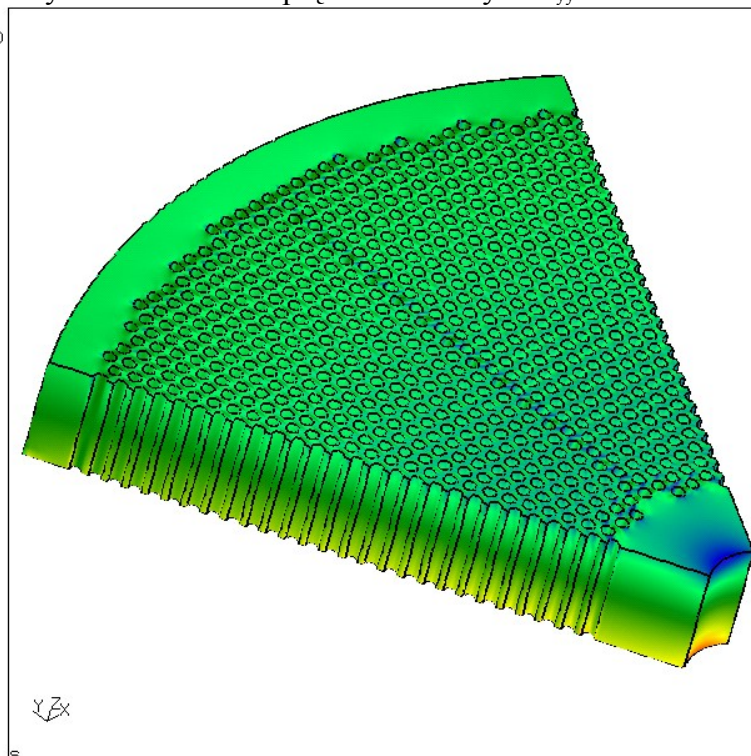
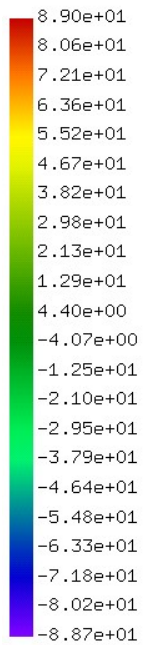
LC2:STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:yy
max: 1.09e+02
min: -1.08e+02



plyta.frd

Rys.7.5. Rozkład naprężeń normalnych σ_{yy}

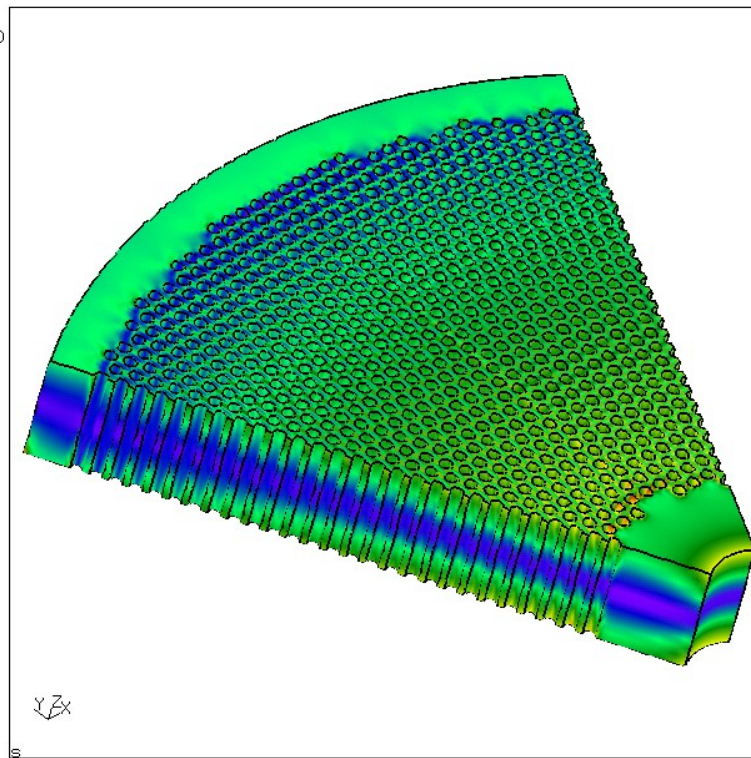
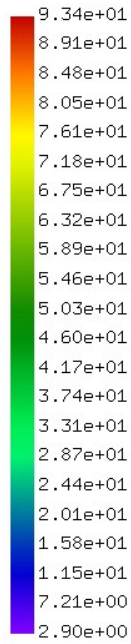
LC2:STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:xx
max: 8.90e+01
min: -8.87e+01



plyta.frd

Rys.7.6. Rozkład naprężeń normalnych σ_{xx}

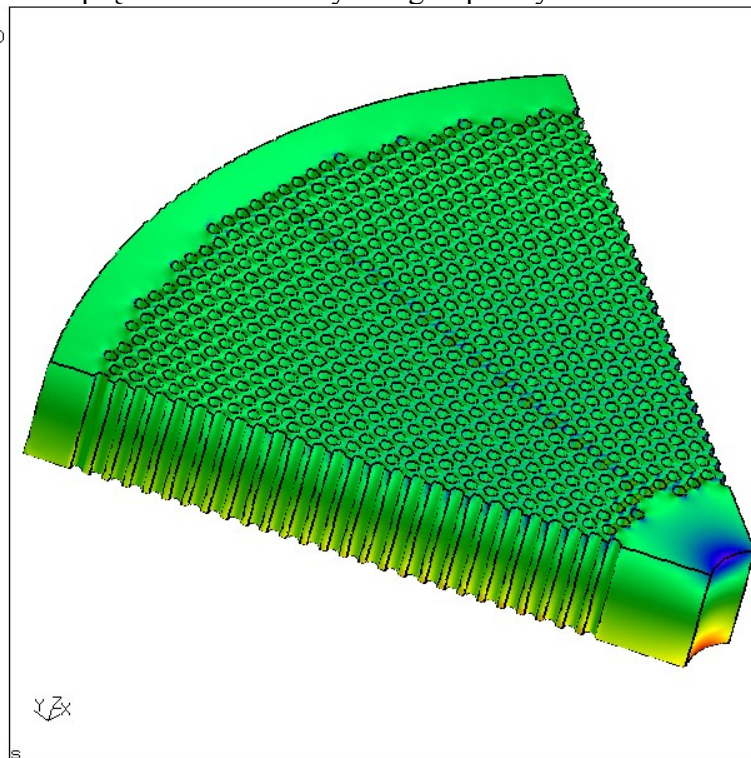
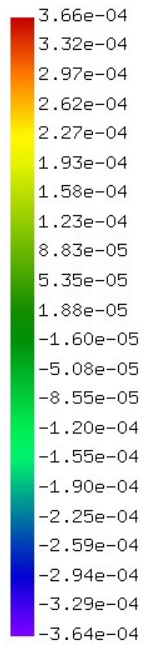
LC4:+STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:Mises
max: 9.34e+01
min: 2.90e+00



plyta.frd

Rys.7.7. Rozkład naprężeń zredukowanych wg. hipotezy Hubera – Misesa

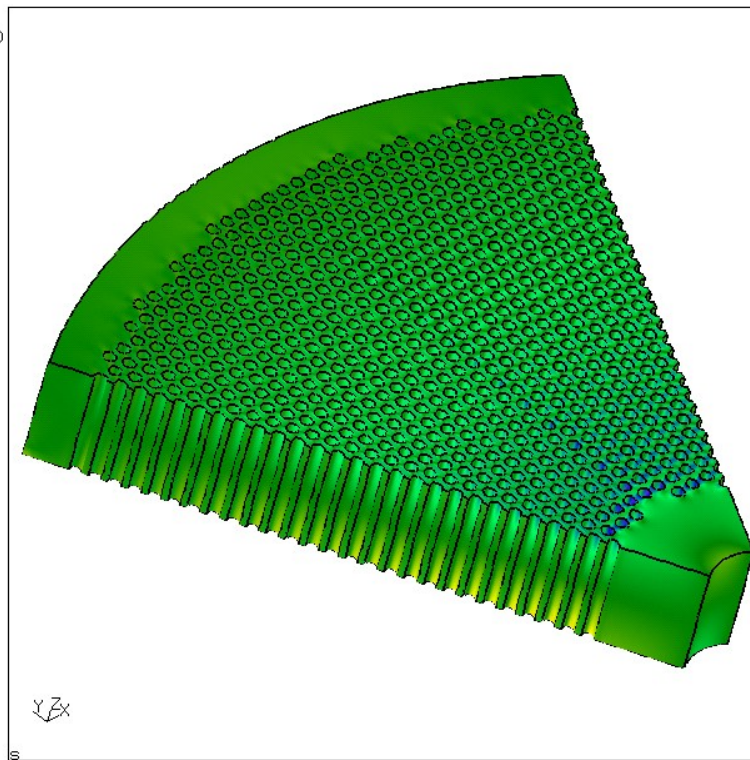
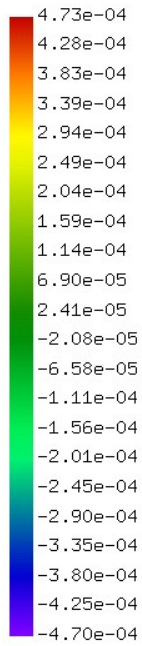
LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:xx
max: 3.66e-04
min: -3.64e-04



plyta.frd

Rys.7.8. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{xx}

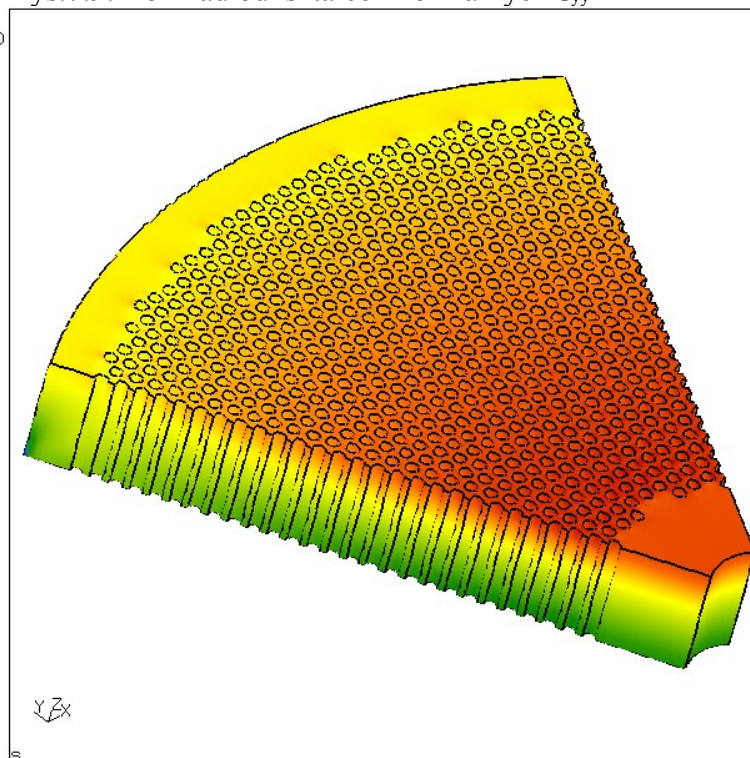
LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:yy
max: 4.73e-04
min: -4.70e-04



plyta.frd

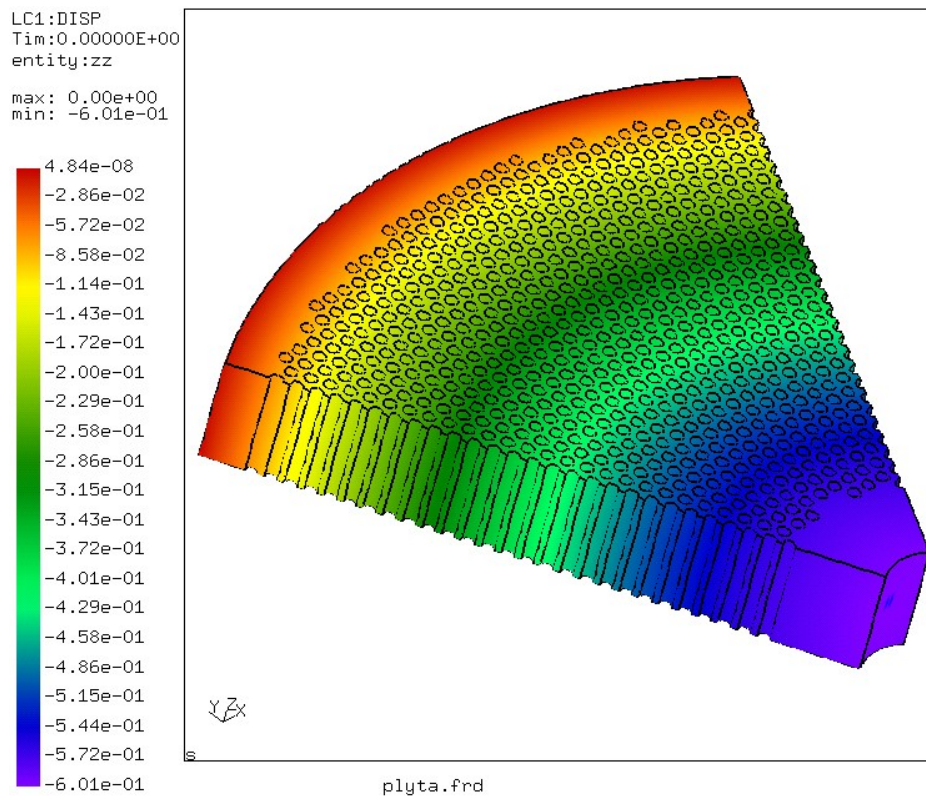
Rys.7.9. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{yy}

LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:zz
max: 1.18e-04
min: -3.41e-04



plyta.frd

Rys.7.10. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{zz}

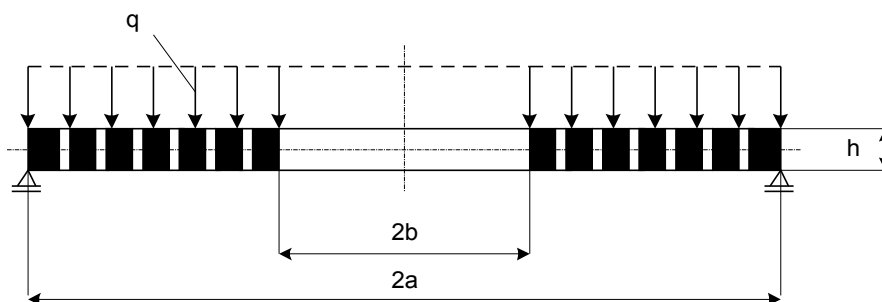


Rys.7.11. Rozkład przemieszczeń w kierunku osi z

7. PŁYTY PERFOROWANE – SYMULACJE NUMERYCZNE.

7.1 Płyta perforowana z otworem centralnym swobodnie podparta.

W pierwszym przypadku analizie numerycznej poddano płytę perforowaną z heksagonalnym rozkładem otworów z otworem centralnym swobodnie podpartą na zewnętrznej krawędzi (rys.7.1).. Płyta obciążona jest ciśnieniem $p = 0,45$ [MPa] oraz pochodzącym od górnego wymiennika ciepła ciężarem $Q = 36000$ [kG] przenoszonym przez rurki i zamienionym na ciśnienie o wartości $0,573$ [MPa]. Sumaryczne obciążenie wynosi $q = 1,023$ [MPa].



Rys.7.1. Schemat płyty perforowanej z otworem centralnym swobodnie podpartej

Dane:

$a = 550$ [mm] $h = 91$ [mm] $C_r = 0,33$

$$b = 47 \quad [\text{mm}] \quad q = 1,023 \quad [\text{MPa}] \quad C_\vartheta = 0,61$$

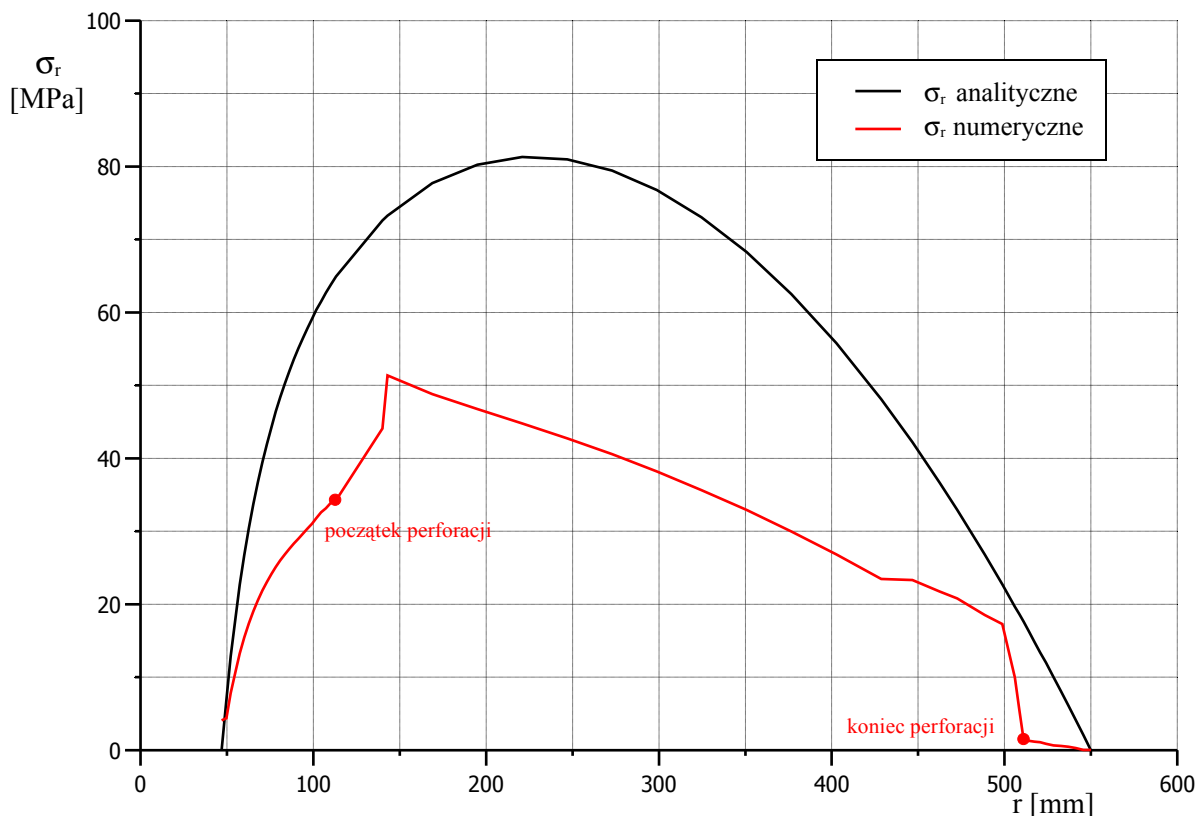
$$k_1 = \frac{q}{2}, \quad k_2 = -\frac{qb^2}{2}, \quad k_3 = 0.$$

Na podstawie wzorów (4.32) z warunków brzegowych w postaci $m_r(b) = 0$ oraz $m_r(a) = 0$ otrzymano stałe całkowania [7] (7.1), które podstawiając z powrotem do związków (4.32) pozwoliły na obliczenie natężenia momentu promieniowego i obwodowego.

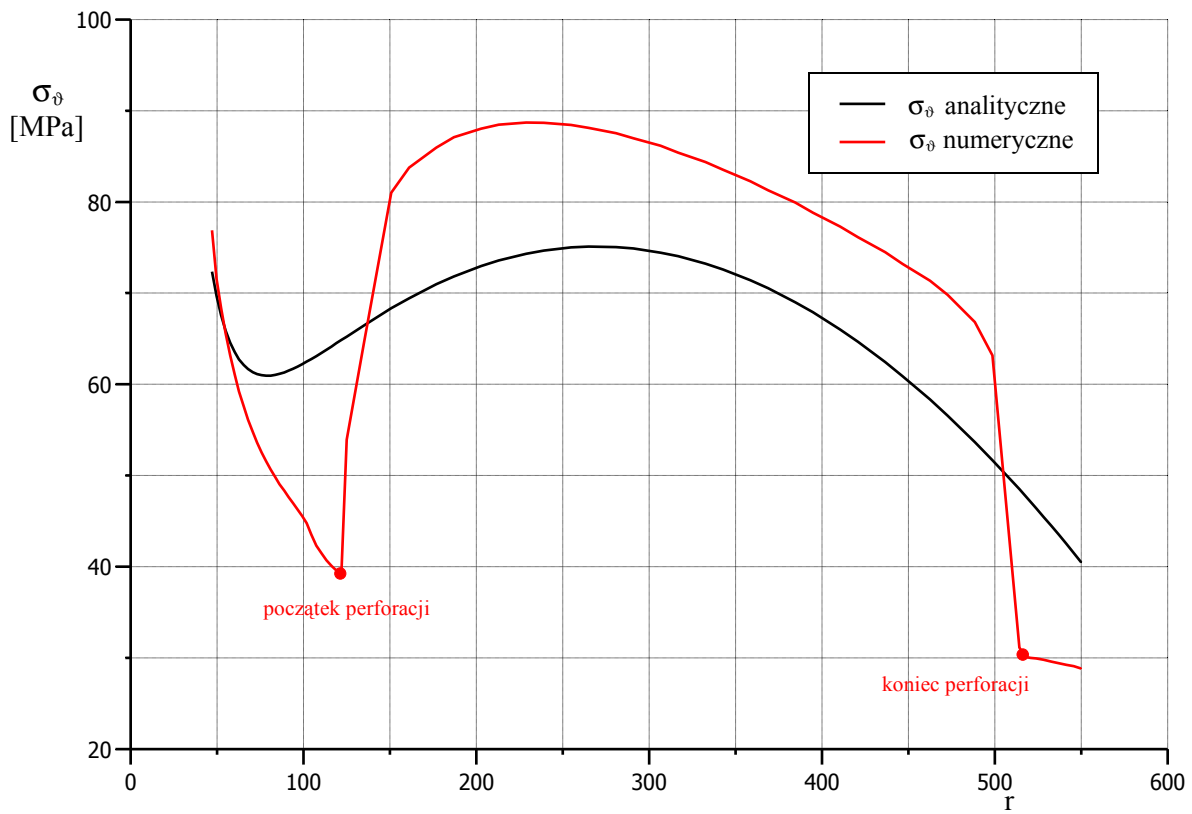
$$C_1 = \frac{ab^{\lambda_2} \left[\frac{k_1 a^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right] - ba^{\lambda_2} \left[\frac{k_1 b^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right]}{B_r(\lambda_1 + \nu)(a^{\lambda_1} b^{\lambda_2} - a^{\lambda_2} b^{\lambda_1})} \quad (7.1)$$

$$C_2 = \frac{ba^{\lambda_1} \left[\frac{k_1 b^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right] - ab^{\lambda_1} \left[\frac{k_1 a^2 (3+\nu)}{(3-\lambda_1)(3-\lambda_2)} + \frac{k_2 (1+\nu)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right]}{B_r(\lambda_2 + \nu)(a^{\lambda_1} b^{\lambda_2} - a^{\lambda_2} b^{\lambda_1})}$$

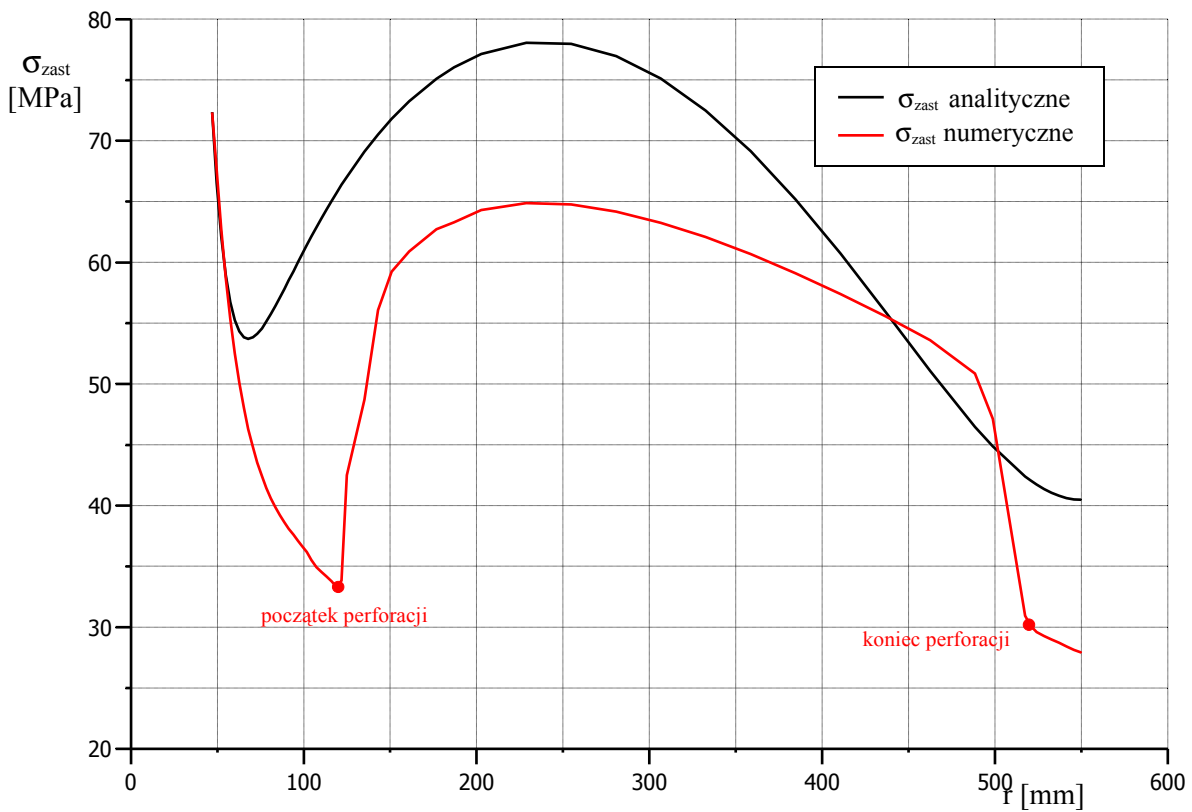
Napężenia promieniowe i obwodowe obliczone zostały za pomocą zależności (4.34).



Rys.7.2. Wykres naprężeń promieniowych σ_r

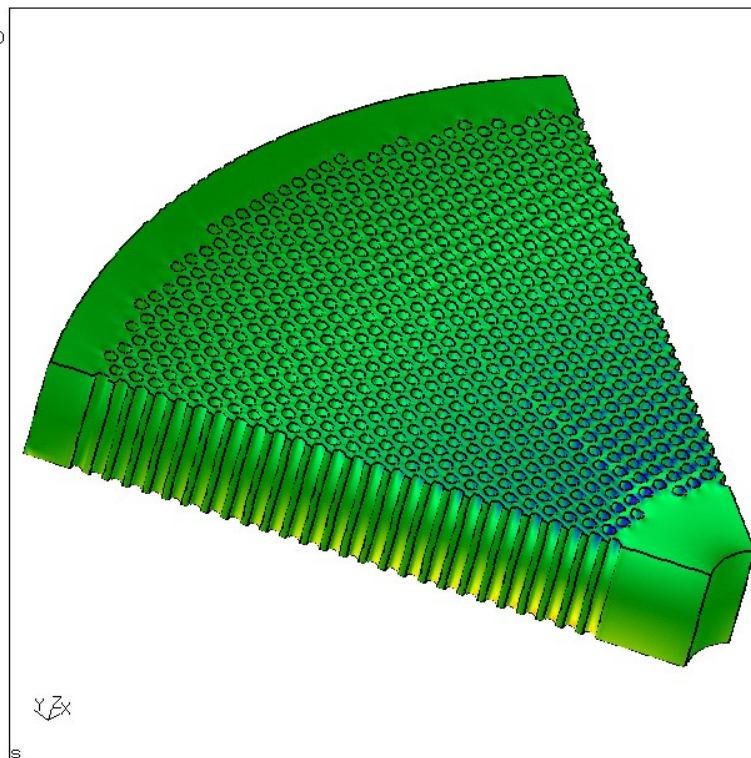
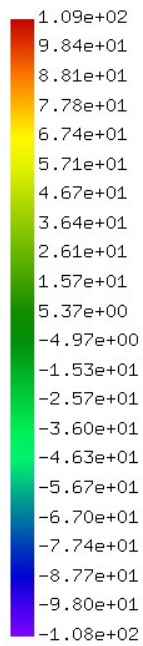


Rys.7.3. Wykres naprężeń obwodowych σ_θ



Rys.7.4. Wykres naprężeń zastępczych wg. hipotezy Hubera – Misesa

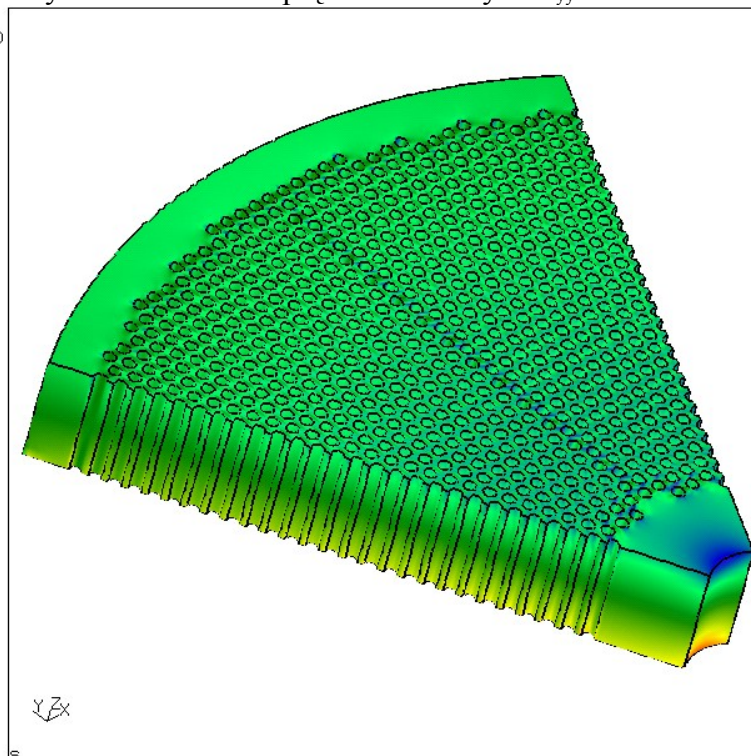
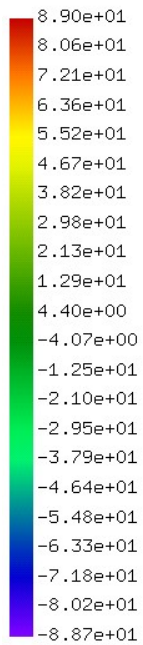
LC2:STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:yy
max: 1.09e+02
min: -1.08e+02



plyta.frd

Rys.7.5. Rozkład naprężeń normalnych σ_{yy}

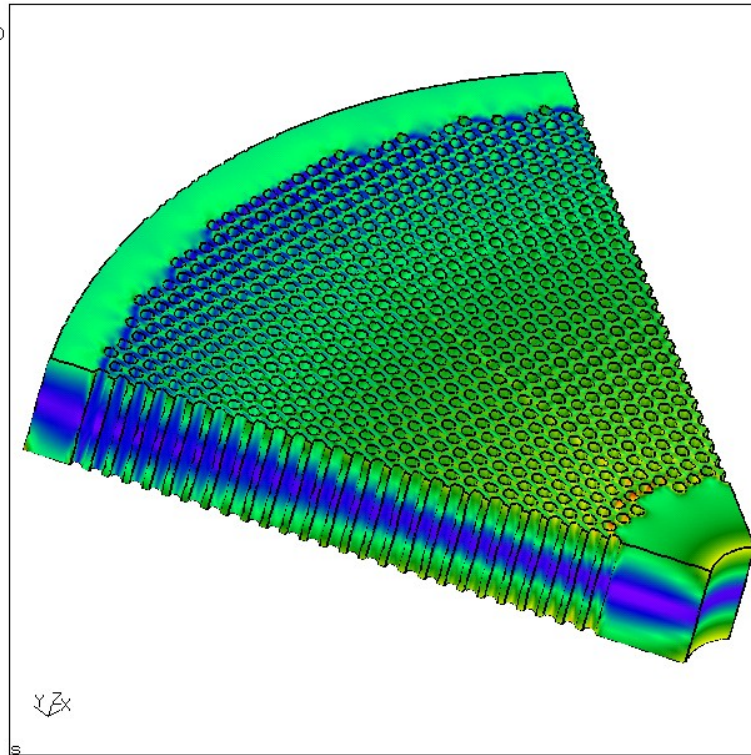
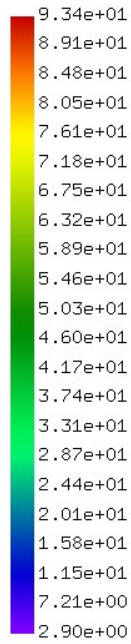
LC2:STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:xx
max: 8.90e+01
min: -8.87e+01



plyta.frd

Rys.7.6. Rozkład naprężeń normalnych σ_{xx}

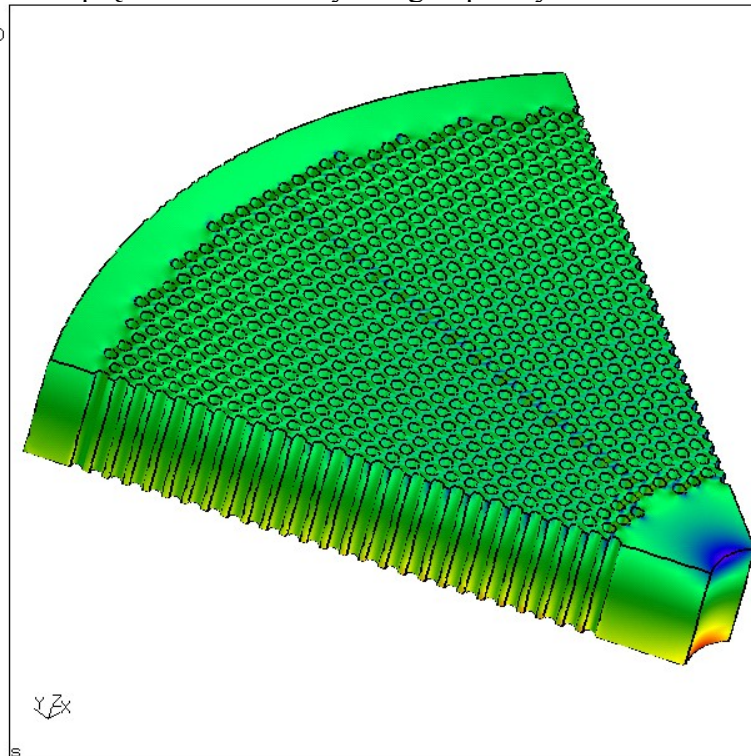
LC4:+STRESS
Tim:0.00000E+00
entity:Mises
max: 9.34e+01
min: 2.90e+00



plyta.frd

Rys.7.7. Rozkład naprężeń zredukowanych wg. hipotezy Hubera – Misesa

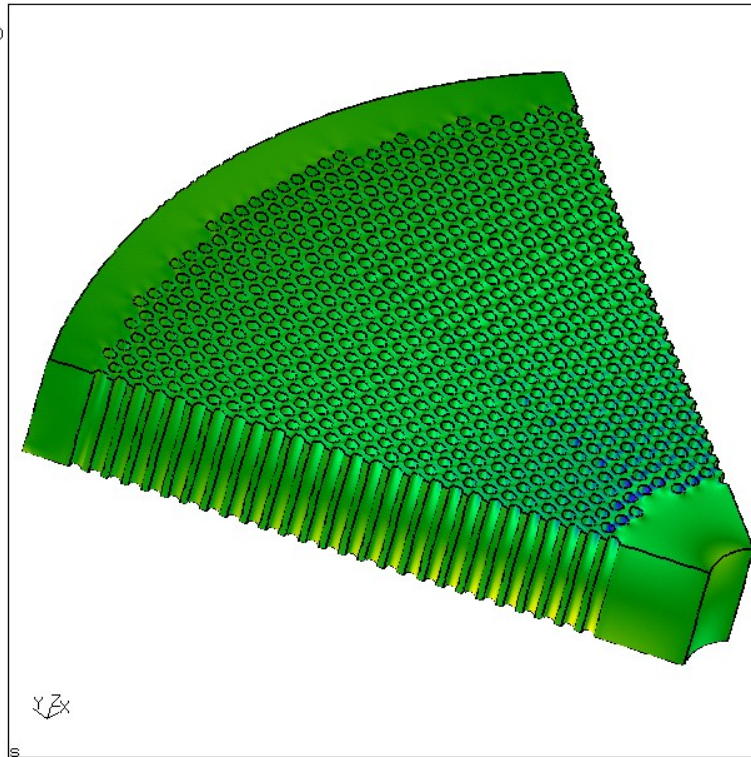
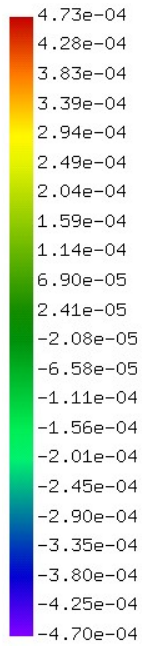
LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:xx
max: 3.66e-04
min: -3.64e-04



plyta.frd

Rys.7.8. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{xx}

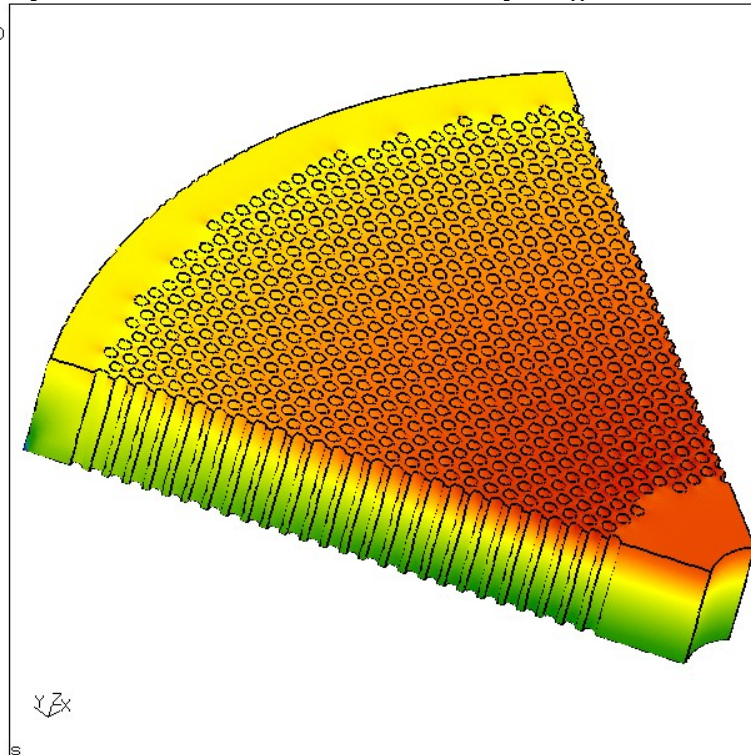
LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:yy
max: 4.73e-04
min: -4.70e-04



plyta.frd

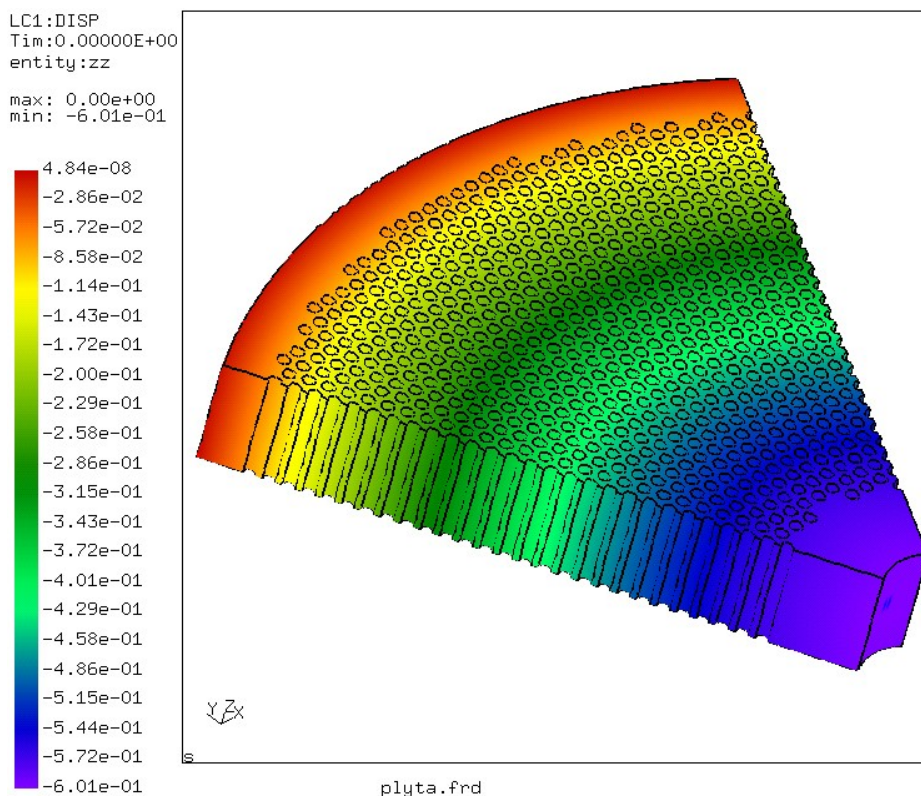
Rys.7.9. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{yy}

LC3:STRAIN
Tim:0.00000E+00
entity:zz
max: 1.18e-04
min: -3.41e-04



plyta.frd

Rys.7.10. Rozkład odkształceń normalnych ϵ_{zz}



Rys.7.11. Rozkład przemieszczeń w kierunku osi z

7.1.1 Analiza wyników.

Na wszystkich wykresach przedstawionych na rysunkach 7.2, 7.3, 7.4 dotyczących płyty perforowanej posiadającej otwór centralny swobodnie podpartej widać, że kształty krzywych opisujących rozkład naprężeń otrzymanych na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych znacznie się od siebie różnią.

Wykres naprężeń promieniowych analitycznych ma kształt podobny do wykresu analogicznych naprężeń dla płyty nieperforowanej bez otworu centralnego swobodnie podpartej (rys.6.8). Wykres rozpoczyna się i kończy zerową wartością naprężenia. Wynika to z faktu, że początek wykresu opowiada wewnętrznej górnej krawędzi płyty stanowiącej krawędź otworu centralnego natomiast koniec wykresu odpowiada zewnętrznej krawędzi płyty. W miejscach tych występują powierzchnie swobodne w których nie mogą pojawiać się naprężenia promieniowe. Porównując wykresy naprężeń promieniowych analitycznych dla płyty perforowanej (rys.7.2) i nieperforowanej (rys.6.8) można zauważyć różnice między maksymalnymi wartościami naprężeń. W przypadku płyty perforowanej maksymalna wartość naprężenia występuje na okręgu o promieniu $r = 233$ i wynosi 81 [MPa] natomiast dla płyty nieperforowanej naprężenie to zlokalizowane jest bliżej środka płyty, na okręgu o promieniu $r = 163$ [mm] i wynosi $33,2$ [MPa]. Biorąc pod uwagę różnice między wysokościami obu płyt oraz uwzględniając warunek nie przekroczenia naprężeń dopuszczalnych

przez naprężenia całkowite nasuwa się wniosek, że według modelu analitycznego wprowadzenie do płyty perforacji spowoduje wzrost naprężeń promieniowych o 144%. Zupełnie inaczej rzecz ma się w przypadku wykresu naprężeń promieniowych numerycznych. Według wykresu na rys.7.2 obliczenia analityczne w porównaniu z analizą numeryczną znacznie zawyżają wyniki. Maksymalna wartość naprężenia promieniowego numerycznego występuje na okręgu opisanym promieniem $r = 143$ [mm] i wynosi 51 [MPa]. Stanowi to wartość o 37% mniejszą niż analogiczne naprężenie uzyskane przez obliczenia analityczne. Ponadto porównując wykresy numeryczne z rysunków 7.2. i 6.8. można stwierdzić, że w płycie perforowanej naprężenia promieniowe maksymalne są o 50% większe niż w płycie nieperforowanej z zadania testowego. Koniec wykresu numerycznego pokrywa się z końcem krzywej opisującej naprężenia analityczne i osiąga wartość naprężenia równą zero. Inaczej jest na początku wykresu gdzie naprężenie promieniowe numeryczne osiąga wartość 4 [MPa], gdzie ze względu na istnienie powierzchni swobodnej powinny wynosić zero. Podobnie jak w przypadku płyty z otworem centralnym, nieperforowanej swobodnie podpartej jest to spowodowane sposobem całkowania w punktach Gaussa elementu skończonego oraz przyjętą metodą aproksymacji wartości węzłowych w elemencie skończonym [10].

Różnice między kształtami krzywych na wykresie naprężeń promieniowych wynikają nie tylko z rodzaju przeprowadzonej analizy, ale również z różnic między przyjętymi modelami. W przypadku modelu analitycznego przyjmuje się, że płyta jest perforowana w całym obszarze tzn. od promienia $r = 47$ [mm] do $r = 550$ [mm]. Natomiast model numeryczny uwzględnia w swojej geometrii obszary nieperforowane.

Na rys.7.12 przedstawiono fragment geometrii płyty perforowanej zastosowanej do obliczeń numerycznych. Ze względu na nieregularny rozkład otworów na granicach obszarów przyjęto wg rys.7.12, że od promienia $r = 47$ [mm] do $r = 114$ [mm] oraz od $r = 516,2$ [mm] do $r = 550$ [mm] występują obszary nieperforowane. Natomiast pomiędzy nimi tj. w przedziale ($r = 114$; $r = 516,2$) znajduje się obszar perforowany. Ponieważ do sporządzenia wykresów użyto węzłów leżących wzdłuż osi y obszar ten zmniejsza się do przedziału wyznaczonego przez węzły leżące na promieniach $r = 122$ [mm] i $r = 514$ [mm].

Tak więc na wykresie naprężeń promieniowych numerycznych (rys.7.2) można wyodrębnić trzy zakresy wyznaczające następujące obszary:

1. Obszar nieperforowany – położony wokół otworu centralnego, w którym rozkład naprężeń zilustrowany jest na wykresie w postaci krzywej położonej w przedziale zawierającym się między początkiem wykresu tj. $r = 47$ [mm] a punktem przegięcia $r = 122$ [mm] będącym jednocześnie początkiem perforacji.

2. Obszar perforowany – opisany przez krzywą położoną między punktami oznaczonymi jako początek i koniec perforacji położonymi na okręgach o promieniach odpowiednio $r = 122$ [mm] i $r = 514$ [mm].
3. Obszar nieperforowany – położony przy zewnętrznej krawędzi płyty, w którym przebieg zmiany naprężenia opisuje prosta położona w zakresie $r = 514$; $r = 550$ [mm].

Na wykresie naprężeń obwodowych (rys.7.3) widać, że obliczenia numeryczne w porównaniu z obliczeniami analitycznymi zawyżają wyniki. Maksymalna wartość naprężenia obwodowego analitycznego wynosi 75 [MPa] i umiejscowiona jest na okręgu o promieniu 290 [mm]. Natomiast maksymalne naprężenie obwodowe jest o około 17% większe od analitycznego i wynosi 88 [MPa]. Kształt krzywej opisującej rozkład naprężeń obwodowych analitycznych nie wynika z występowania obszaru perforowanego i nieperforowanego co sugerować może minimum lokalne znajdujące się na promieniu $r = 79$ [mm] wynoszące 61 [MPa]. Wykres numeryczny jeszcze bardziej niż w przypadku wykresu naprężeń promieniowych z rys.6.8 uwidacznia podział modelu na obszary. Kształt krzywej opisującej zmianę naprężeń w obszarze bez perforacji mieszczącej się w przedziale od $r = 47$ do $r = 122$ [mm] odpowiada krzywej mieszczącej się w analogicznym przedziale dla płyty nieperforowanej (rys.6.9). To samo dotyczy zakresu od $r = 514$ [mm] do $r = 550$ [mm]. W obszarze perforowanym tj. pomiędzy punktami oznaczonymi jako początek i koniec perforacji występuje gwałtowny wzrost naprężeń spowodowany osłabieniem płyty przez otwory. Różnice między wynikami analitycznym i numerycznym występują również na początku i końcu wykresu. Naprężenie obwodowe znajdujące się na krawędzi otworu centralnego tj. dla $r = 47$ [mm] otrzymane przez obliczenia analityczne wynosi 72 [MPa] To samo naprężenie numeryczne jest niewiele większe osiągając wartość 77 [MPa]. Większa różnica umiejscowiona jest na końcu wykresu, gdzie naprężenie obwodowe numeryczne ($\sigma_{\theta} = 29$ [MPa]) jest o 29% mniejsze niż naprężenie analityczne ($\sigma_{\theta} = 41$ [MPa]).

Wykres naprężeń zastępczych analitycznych (rys.7.4) sporządzony został na podstawie hipotezy wyteżeniowej Hubera – Misesa dla płaskiego stanu naprężenia według zależności (6.4). Początek i koniec wykresu dokładnie pokrywają się z początkiem i końcem krzywej opisującej rozkład naprężeń obwodowych. Wynika to z nie występowania w tych miejscach naprężeń promieniowych. Istotną różnicą między wykresem analitycznym i numerycznym jest miejsce pojawienia się największych naprężeń. Maksymalna wartość naprężenia zastępczego zlokalizowana jest na okręgu o promieniu $r = 239$ [mm] (tj. w przedziale wyznaczającym perforację modelu numerycznego) i wynosi $\sigma_{zast\ max} = 78$ [MPa]. W przypadku wykresu otrzymanego na drodze analizy numerycznej maksymalna wartość tego naprężenia występuje na krawędzi otworu centralnego tj. na promieniu $r = 47$ [mm] osiągając wartość $\sigma_{zast\ max} = 72$ [MPa]. Według rys.7.4 na wykresie numerycznym w obszarze perforowanym położonym pomiędzy punktami określonymi jako

początek i koniec perforacji największe naprężenie zastępcze ($\sigma_{zast} = 65$ [MPa]; $r = 255$ [mm]) jest o 17% mniejsze od największego znajdującego się w tym przedziale naprężenia analitycznego ($\sigma_{zast} = 78$ [MPa]). Tymczasem na podstawie wykresów naprężeń promieniowych i obwodowych należałoby się spodziewać, że właśnie w obszarze perforacji pojawią się maksymalne naprężenia zredukowane. Przyczyną wyżej opisanej sytuacji jest zaimplementowana w aplikacji hipoteza wyężeniowa Hubera – Misesa dla przestrzennego stanu naprężenia, której postać opisuje zależność (6.3). Po wnikliwej analizie okazało się, że wyniki numeryczne zawierają naprężenia normalne σ_{zz} powodujące zaniżanie wartości naprężeń zastępczych.

$$T = \begin{vmatrix} 88,4 & 0,004 & 5,5e-5 \\ 0,004 & 36 & 2 \\ 5,5e-5 & 2 & 16,1 \end{vmatrix}$$

Powyższy tensor przedstawia stan naprężenia w węźle położonym na okręgu o promieniu 255 [mm], w którym zlokalizowane są największe naprężenia obwodowe. Obliczając naprężenie zastępcze według zależności (6.2), nie uwzględniając naprężeń stycznych oraz naprężenia normalnego σ_{zz} otrzymano wartość naprężenia zastępczego $\sigma_{zast} = 77$ [MPa]. A więc pojawienie się naprężenia $\sigma_{zz} = 16,1$ [MPa] spowodowało spadek naprężenia zastępczego o 15,6%. W świetle przeprowadzonej analizy należy przyjąć, że wykres naprężeń zastępczych numerycznych przedstawia wartości zaniżone w głównej mierze przez naprężenia normalne σ_{zz} .

Rysunki 7.5 i 7.6 ilustrują mapy naprężeń normalnych odpowiednio w kierunku x i y. Na rys.7.6 widać wzrost naprężeń σ_{xx} na krawędzi otworu wewnętrznego. Znak ujemny oznacza naprężenia ściskające. Analizując rys.7.7 można zauważyć, że na okręgu wyznaczającym koniec obszaru perforacji występują naprężenia znacznie mniejsze niż te z wykresu naprężeń zastępczych numerycznych (rys.7.4). Fakt ten jest wynikiem aproksymacji wykresu.

Rysunki 7.8, 7.9, 7.10 obrazują rozkład odkształceń odpowiednio w kierunku x, y i z. Na rys.7.8 wyraźnie widać, że odkształcenia ϵ_{xx} osiągają największe wartości w miejscach występowania największych naprężeń σ_{xx} . Krawędziowe podparcie płyty nie pozostaje bez wpływu na stan odkształcenia powodując ich wzrost w okolicach utwierdzenia węzłów (rys.7.10).

Przemieszczenia w płycie będą największe w kierunku działania obciążenia czyli osi z, a ich największa wartość przypada na węzły tworzące otwór wewnętrzny i wynosi 0.601 [mm].