zmiennej niezależnej równej 0, dodatkowo należy go określić przed poleceniem `desolve()`. Analizując funkcje (8.2.3) można ustalić, jak należy skonstruować warunki początkowe.

```
(%i4) atvalue(f(x),x=0,1)$
(%i5) atvalue(g(x),x=0,2)$
(%i6) atvalue(diff(g(x),x),x=0,3)$
(%i7) desolve([eq1,eq2],[f(x),g(x)]);
(%o7)
```

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\,e^x + \frac{x^4}{4} + x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 3 \\ g(x) &= -2\,e^x + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{5\,x^2}{2} + 5\,x + 4 \end{aligned}$$

Przyjęto jeden warunek początkowy `(%i14)` dla równania pierwszego rzędu (8.2.2) oraz dwa warunki początkowe dla rówania drugiego rzędu. Pojedyncze równanie różniczkowe może być również rozwiązywane za pomocą polecenia `desolve()`.

8.3. Równania całkowe

Zagadnienie symbolicznego rozwiązywania równań całkowych jest bardzo złożone. Maxima oferuje szereg różnych metod rozwiązywania przeznaczonych dla równań Volterry i Fredholma[8] pierwszego i drugiego rodzaju. W tym miejscu pokażemy trzy przykłady, sugerując studiowanie pomocy podręcznej programu Maxima oraz obszernej literatury [25] z tej dziedziny.

Przykład I Załóżmy, że mamy następujące bardzo proste równanie całkowe

$$\int f(x)\, dx = x. \tag{8.3.1}$$

Poszukujemy takiej funkcji $f(x)$, która spełnia równanie (8.3.1). Aby otrzymać rozwiązanie należy w pierwszej fazie wczytać bibliotekę `INTEQN`:

[8] Eric Ivar Fredholm (1866-1927), matematyk szwedzki, jego głównym osiągnięciem jest to, że problem rozwiązywania pewnej klasy równań całkowych sprowadził do rozwiązywalności układu algebraicznych równań liniowych.

```
(%i1) load(INTEQN)$
```

a następnie po zdefiniowaniu równania (8.3.1)

```
(%i2) eqn1:integrate(f(x),x)=x;
(%o2)
```

$$\int f(x)\, dx = x$$

wydać polecenie rozwiązujące powyższe równanie:

```
(%i3) ieqn(eqn1,f(x),first,6);
(%o3)
```

$$[1, TRANSFORM]$$

Uzyskane rozwiązanie jest podane w postaci wektora, w którym pierwsze pole zawiera poszukiwaną funkcję, pozostałe pola przynoszą informacje o sposobie rozwiązywania. W naszym przypadku zgodnie z oczekiwaniem $f(x) = 1$.

Przykład II Drugi przykład jest nieco bardziej skomplikowany. Przedmiotem naszego zainteresowania jest równanie całkowe Abela[9] zapisane w postaci ogólnej:

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x), \tag{8.3.2}$$

poszukujemy rozwiązania w postaci

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx \ . \tag{8.3.3}$$

Całka w równaniu (8.3.3) jest zbieżna, przy założeniu ciągłości funkcji $f(x)$, mimo osobliwości funkcji podcałkowej.
Rozważmy teraz szczególną postać równania Abela

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = x. \tag{8.3.4}$$

[9] Niels Henrik Abel (1802-1829) matematyk norweski, w 1824 dowiódł niemożności rozwiązania w postaci ogólnej równań algebraicznych stopnia piątego wyższych zapisanego za pomocą skończonej liczby działań algebraicznych, współtwórca teorii funkcji eliptycznych i hiperbolicznych.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, należy wczytać bibliotekę `INTEQN`, dalsza część skryptu Maximy jest następująca:

```
(%i4)eqn2:'integrate(p(y)/SQRT(x-y),y,0,x)-x$
(%i5)ieqn(eqn2,p(x),abel);
DEFAULT 4TH ARG, NUMBER OF ITERATIONS OR COLL.PARMS.: 1
DEFAULT 5TH ARG, INITIAL GUESS:  NONE
Is  x  positive, negative, or zero?
pos;
(%t5)
```

$$\left[\frac{2\sqrt{x}}{\pi}, ABEL\right]$$

```
(%o5)                     [%t5]
```

Otrzymane rozwiązanie jest oczywiście zgodne z rozwiązaniem analitycznym. Słowo kluczowe `abel` w poleceniu `ieqn()` wymusza sposób rozwiązywania dostosowany do równania Abela. Zamiana słowa `abel` na `all` pozwala zobaczyć w działaniu inne metody - nie zawsze skuteczne.

Przykład III Rozpatrzmy równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju

$$\lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y)p(y)dy + 1 = p(x). \tag{8.3.5}$$

Rozwiążemy je, testując wszystkie dostępne w Maximie metody rozwiązywania równań całkowych drugiego rodzaju, w przypadku metody rozwijania w szeregi ustawiono maksymalnie sześć wyrazów.

```
(%i6)eqn3:lambda*'integrate(sin(x+y)*p(y),y,0,%pi)+1-p(x);
(%i7)ieqn(eqn3,p(x),all,6);
DEFAULT 5TH ARG, INITIAL GUESS:  NONE
Is  %C  LAMBDA  positive, negative, or zero?
      1
pos;
Is  %C  LAMBDA  positive, negative, or zero?
      2
```

```
pos;
(%t7)
```

$$\left[-\frac{\left(4\,\pi\,\sin x-\pi^2\right)\,\lambda^2+8\,\cos x\,\lambda+4}{\pi^2\,\lambda^2-4}, FLFRNK2ND\right]$$

```
Is  COS(y - x)  positive, negative, or zero?
pos;
Is  SIN(y + x)  positive, negative, or zero?
pos;
(%t8)
```

$$\left[\frac{\left(\pi^2-4\,\pi\,\sin x\right)\,\lambda^2-8\,\cos x\,\lambda-4}{\pi^2\,\lambda^2-4}, FREDSERIES, 6\right]$$

```
Is  SIN(x) LAMBDA  positive, negative, or zero?
pos;             2
Is  COS(x) LAMBDA   positive, negative, or zero?
pos;
(%t9)
```

$$\left[\frac{\pi^5\,\sin x\,\lambda^6}{16}+\frac{\pi^4\,\cos x\,\lambda^5}{8}+\frac{\pi^3\,\sin x\,\lambda^4}{4}+\frac{\pi^2\,\cos x\,\lambda^3}{2}+\pi\,\sin x\,\lambda^2+ \right.$$
$$\left. 2\,\cos x\,\lambda+1, NEUMANN, 6, APPROXIMATE\right]$$

FLFRNK2ND - metoda Fredholma, *FREDSERIES* - rozwijanie w szereg Fredholma-Carlsona i *NEUMANN* - rozwijanie w szereg von Neumanna[10]. Oceniając poprawność dwu pierwszych rozwiązań równania (8.3.5) zapisanych w liniach `(%t7)` i `(%t8)`, spostrzegamy, że są identyczne z rozwiązaniem analitycznym [5] uzyskanym metodą Fredholma.

Kończąc powyższy rozdział chcemy jednak uczulić czytelnika, aby do uzyskiwanych rozwiązań, szczególnie równań różniczkowych i całkowych, podchodził krytycznie. Rozwiązywanie należy rozpoczynać od rozwiązania zadania testowego (o znanym rozwiązaniu analitycznym), maksymalnie zbliżonego postacią do naszego problemu, warto również szukać alternatywnych (np. numerycznych) metod rozwiązywania.

[10] John von Neumann (1903-1957) matematyk amerykański narodowości węgierskiej, podał zasady teoretyczne budowy komputerów, liczne prace z mechaniki kwantowej, teorii mnogości, analizy funkcjonalnej, teorii gier i innych.