

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE.



# MÉCHANIQUE

## ANALITIQUE;

*Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris,  
de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*



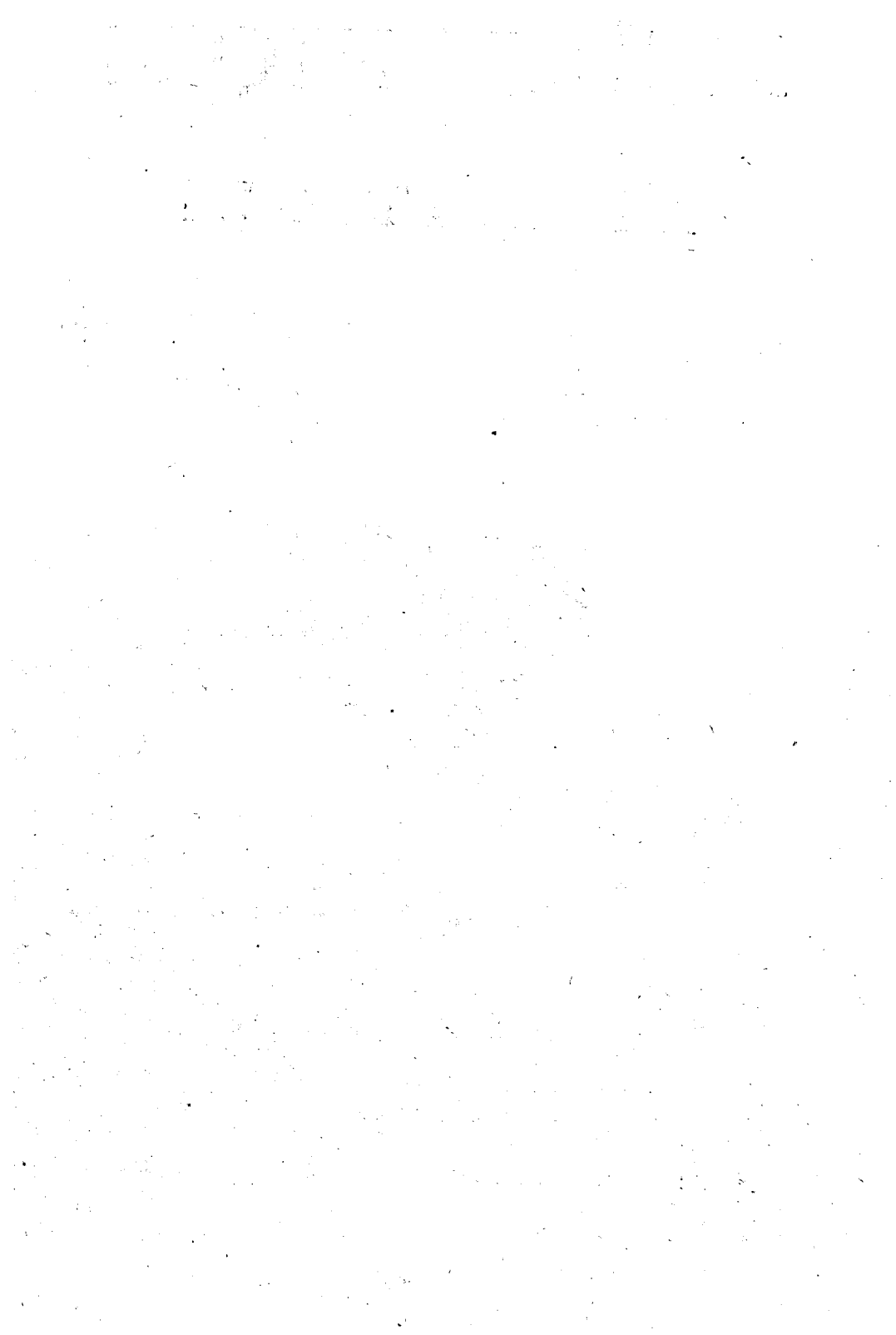
*A PARIS,*

**Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire,  
rue du Foin S. Jacques.**

---

M. DCC. LXXXVIII.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.*



---

## AVERTISSEMENT.

ON a déjà plusieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, & l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laissera rien à désirer.

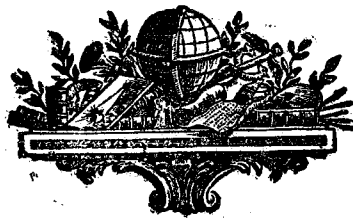
Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité; il réunira & présentera sous un même point de vue, les différens Principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Méchanique, en montrera la liaison & la dépendance mutuelle, & mettra à portée de juger de leur justesse & de leur étendue.

Je le divise en deux Parties; la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, & la Dynamique ou la Théorie

vj *AVERTISSEMENT.*

du Mouvement; & chacune de ces Parties traitera séparément des Corps solides & des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, & me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.



---



---

# T A B L E.

## PREMIERE PARTIE DE LA MÉCHANIQUE,

### O U L A S T A T I Q U E.

<b>S</b> ECTION I. <i>Sur les différens Principes de la Statique,</i>	Page 1
<b>S</b> ECT. II. <i>Formule générale pour l'équilibre d'un système quelconque de forces; avec la maniere de faire usage de cette formule.</i>	12
<b>S</b> ECT. III. <i>Propriétés générales de l'équilibre déduites de la formule précédente.</i>	25
<b>S</b> ECT. IV. <i>Méthode très-simple de trouver les équations nécessaires pour l'équilibre d'un système quelconque de corps regardés comme des points, ou comme des masses finies, &amp; tirés par des puissances données.</i>	44
<b>S</b> ECT. V. <i>Solution de différens problèmes de Statique.</i>	58
<b>§</b> . I. De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point; & de la composition & décomposition des forces.	<i>Ibid.</i>
<b>§</b> . II. De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un système de corps considérés comme des points, & liés entr'eux par des	

fil ou par des verges.

Page 68

§. III. De l'équilibre d'un fil dont tous les points sont tirés par des forces quelconques, & qui est supposé parfaitement flexible ou inflexible, ou élastique, & en même tems extensible ou non.	89
§. IV. De l'équilibre d'un corps solide de grandeur sensible & de figure quelconque, dont tous les points sont tirés par des forces quelconques.	116
SECT. VI. <i>Sur les Principes de l'Hydrostatique.</i>	122
SECT. VII. <i>De l'équilibre des fluides incompressibles.</i>	130
SECT. VIII. <i>De l'équilibre des fluides compressibles &amp; élastiques.</i>	155

SECONDE PARTIE DE LA MÉCANIQUE,

OU LA DYNAMIQUE.

SECTION I. <i>Sur les différens Principes de la Dynamique.</i>	Page 158
SECT. II. <i>Formule générale pour le mouvement d'un système de corps, animés par des forces quelconques.</i>	189
SECT. III. <i>Propriétés générales du mouvement déduites de la formule précédente.</i>	198
SECT. IV.	



SECT. IV. <i>Méthode la plus simple pour parvenir aux équations qui déterminent le mouvement d'un système quelconque de corps animés par des forces accélératrices quelconques.</i>	216
SECT. V. <i>Solution de différens problèmes de Dynamique.</i>	233
§. I. Solution générale du problème des oscillations très-petites d'un système quelconque de corps.	241
§. II. Du mouvement d'un corps attiré vers un ou plusieurs centres.	262
§. III. Du mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, soit par des forces d'attraction, soit en se tenant par des fils ou par des leviers.	286
SECT. VI. <i>Sur la rotation des Corps.</i>	337
§. I. Formules générales, relatives au mouvement de rotation.	338
§. II. Équations pour le mouvement de rotation d'un corps solide de figure quelconque, animé par des forces quelconques.	372
§. III. Détermination du mouvement d'un corps grave de figure quelconque.	389
SECT. VII. <i>Sur les Principes de l'Hydrodynamique.</i>	428
SECT. VIII. <i>Du Mouvement des Fluides incompressibles.</i>	437
§. I. Équations générales pour le mouvement des Fluides incompressibles.	438

s. II. Du mouvement des Fluides pesans & homogènes dans des vases ou canaux de figure quelconque.	471
SECT. IX. Du mouvement des Fluides compressibles & élastiques.	492

Fin de la Table.

---

E R R A T A.

- Page 16, ligne 11, déterminées; *lif.* indéterminées.  
 Page 23, ligne 3, s'étoient joints; *lif.* étoient joints.  
 Idem. ligne 21, par la détermination; *lif.* pour la détermination.  
 Page 53, ligne 15, équation; *lif.* équations.  
 Page 125, ligne 5, je; *lif.* se.  
 Page 312, ligne 12,  $A a'$ ; *lif.*  $A a'$ .  
 Page 324, ligne 20, précision; *lif.* précession.  
 Page 424, lig. dern.  $\sqrt{-}$ ; *lif.*  $\sqrt{-1}$ .  
 Page 434, ligne 25, inexacitude; *lif.* incertitude.  
 Page 477, ligne 7, intérieure; *lif.* extérieure.  
 Page 478, ligne 10, divisées; *lif.* dirigées.  
 Idem. ligne 11,  $\xi = 90^\circ =$ ; *lif.*  $\xi = 90^\circ$ .  
 Page 504, lignes 7 & suiv. ; changez  $a$  en  $a$ .

---

**EXTRAIT DES REGISTRES  
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.**

*Du vingt-sept Février mil sept cent quatre-vingt-huit.*

**M**ESSIEURS DE LA PLACE, COUSIN, LE GENDRE & moi, ayant rendu compte d'un Ouvrage intitulé: *Mécanique analytique*, par M. DE LA GRANGE, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de son Approbation, & d'être imprimé sous son Privilège.

Je certifie cet Extrait conforme aux registres de l'Académie. A Paris, ce 27 Février 1788.

LE MARQUIS DE CONDORCET.

---

**PRIVILEGE DU ROI.**

**L**OUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE; A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, Nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilège pour l'impression de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, Nous leur avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalières, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils seront dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caractères, conjointement, ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'im-

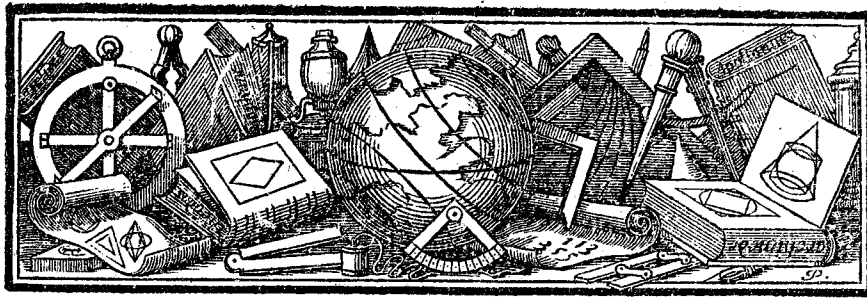
pression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer , ou faire imprimer , vendre , faire vendre & débiter lesdits Ouvrages , en tout ou en partie , & d'en faire aucunes traductions ou extraits , sous quelque prétexte que ce puisse être , sans la permission expresse & par écrit desdits Exposants , ou de ceux qui auront droit d'eux ; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits , de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants , dont un tiers à Nous , un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris , & l'autre tiers auxdits Exposants , ou à celui qui aura droit d'eux , & de tous dépens , dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris , dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs , en bon papier & beaux caracteres , conformément aux Réglemens de la Librairie ; qu'avant de les exposer en vente , les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages , seront remis es mains de notre très-cher & féal Chevalier , Garde des Sceaux de France , le sieur HUE DE MIROMENIL , Commandeur de nos Ordres ; qu'il en fera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique , un dans celle de notre Château du Louvre , & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier , Chancelier de France , le sieur DE MAUREOU , & un dans celle dudit sieur HUE DE MIROMENIL. Le tout à peine de nullité desdites Présentes ; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposants & leurs ayans causes , pleinement & paisiblement , sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes , qui sera imprimée tout au long , au commencement ou à la fin desdits Ouvrages , soit tenue pour dûment signifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires , soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis , de faire pour l'exécution d'icelles , tous actes requis & nécessaires , sans demander autre permission , & nonobstant clameur de Haro , Charte Normande , & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris , le premier jour de Juillet , l'an de grace mil sept cent soixante-dix-huit , & de notre Règne le cinquième. Par le Roi en son Conseil,

Signé LE BEGUE.

*Registré sur le Registre XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris , N° 1477 , folio 582 , conformément au Règlement de 1723 , qui fait défenses , article IV , à toutes personnes , de quelque qualité & condition qu'elles soient , autres que les Libraires & Imprimeurs , de vendre , débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom , soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement ; & à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires , prescrits par l'art. CVIII du même Règlement. A Paris le 20 Août 1778.*

Signé A. M. LOTTIN l'aîné , Syndic.

MÉCHANIQUE



# MÉCHANIQUE ANALITIQUE.

---

PREMIERE PARTIE.

*LA STATIQUE.*

---

SECTION PREMIERE.

*Sur les différens Principes de la Statique.*

---

**L**A Statique est la science de l'équilibre des forces. On entend en général par *force* ou *puissance* la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée; & c'est aussi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que

A

la force ou puissance doit s'estimer. Dans l'état d'équilibre la force n'a pas d'exercice actuel ; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement ; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produiroit si elle n'étoit pas arrêtée. En prenant une force quelconque , ou son effet pour l'unité , l'expression de toute autre force n'est plus qu'un rapport , une quantité mathématique qui peut être représentée par des nombres ou des lignes ; c'est sous ce point de vue que l'on doit considérer les forces dans la Méchanique.

L'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui se combattent & qui anéantissent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres ; & le but de la Statique est de donner les loix suivant lesquelles cette destruction s'opere. Ces loix sont fondées sur des principes généraux qu'on peut réduire à trois ; celui de *l'équilibre dans le levier* , celui de *la composition du mouvement* , & celui des *vitesse virtuelles*.

Archimede, le seul parmi les Anciens qui nous ait laissé quelque théorie sur la Méchanique , dans ses deux Livres de *Æquiponderantibus* , est l'auteur du principe du levier , lequel consiste , comme tout le monde fait , en ce que si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part & d'autre du point d'appui à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids , ce levier fera en équilibre , & son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimede prend ce principe , dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui , pour un axiome de Méchanique évident de soi-même , ou du moins pour un principe d'expérience ; & il ramene à ce cas simple & primitif celui des poids inégaux , en imaginant ces poids lorsqu'ils sont commensurables , divisés en plusieurs parties